1. Compito di Geometria e algebra lineare del 14 febbraio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate bella, brutta e foglio degli esercizi. Distinguete in modo chiaro tra bella e brutta. Motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si definisca cosa è il nucleo di una applicazione lineare;
b) Si dimostri che se il nucleo di una applicazione lineare è zero allora l'applicazione è iniettiva;
c) Siano $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari e si supponga che T è iniettiva e che $S \circ T = 0$. È possibile che la dimensione dell'immagine di S sia 2? [Se è possibile fare un esempio, altrimenti dimostrare che non è possibile.]

Esercizio 2. Sia A la seguente matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Determinare A^{101}.

Esercizio 3. Sia r la retta passante per l'origine e per $(1, 1, 0)$ e s la retta definita dalle equazioni

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) Scrivere una isometria che porta r in s;
b) Scrivere una isometria che porta r in s che non abbia punti fissi e una che che abbia almeno un punto fisso [una delle due può essere quella trovata al punto precedente].
c) Esiste una riflessione che porta r in s?

Esercizio 4. Per $a \in \mathbb{R}$ sia g_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x\,x' + (a-1)y\,y' + a\,z\,z' + (a-1)(x\,z' + x'\,z)$$

a) Esiste una base di formata da vettori isotropi per $a = 0$?
b) Esiste una base formata da vettori isotropi per $a = 1$?
c) Esiste una isometria lineare rispetto a g_2 che porta e_1 in e_3?

Esercizio 1. a) Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, allora $N(F) = \{v \in V \,:\, F(v) = 0\}$.

b) Siano $u, v \in V$ tali che $F(u) = F(v)$ allora per linearità $F(u - v) = 0$ e poiché per ipotesi $N(F) = 0$ di deve avere $u - v = 0$ ovvero $u = v$.

c) Se T è iniettiva allora $\dim Im(T) = 3$. Da $ST = 0$ ricaviamo che $N(S) \supset Im(T)$. Quindi $\dim N(S) \geqslant 3$. Quindi per il teorema della dimensione $\dim ImS = 4 - \dim N(S) \leqslant 1$. Quindi non è possibile che la dimensione dell'immagine di S sia 2.

Esercizio 2. a) La matrice A ha polinomio caratteristico $t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$. $u = (1, 1)$ è un autovettore di autovalore -1 e $v = (3, 2)$ è un autovettore di autovalore 2. Quindi

$$B = [L_A]_{u,v}^{u,v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = [\mathrm{id}]_{e_1,e_2}^{u,v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = [\mathrm{id}]_{u,v}^{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $A = CBC^{-1}$ da cui

$$A^{101} = C \cdot B^{101} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{101} & 0 \\ 0 & 2^{101} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 2^{101} & -3 - 3 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{102} & -3 - 2^{102} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) Osserviamo che le equazioni che definiscono la retta s sono equivalenti a $x = -1$ e $y + z = 1$. Sia s' la retta passante per l'origine parallela a s. Quindi s' è la retta definita dalle equazioni $x = y + z = 0$. Quindi se $u_1 = (1, 1, 0)$, $v_0 = (-1, 1, 0)$ e $v_1 = (0, 1, -1)$ allora

$$s = \mathbb{R}v_1 + v_0 \quad \text{e} \quad s' = \mathbb{R}v_1 \quad \text{e} \quad r = \mathbb{R}u_1$$

Consideriamo una trasformazione ortogonale che porta u_1 in v_1. Per esempio le trasformazioni ortogonali associate alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima ha determinante 1 ed è quindi una rotazione e la seconda ha determinante -1 e fissa almeno una retta e quindi è una riflessione. Quindi se $w \in s$ (per esempio $w = v_0$) allora tutte le trasformazioni della forma

$$f(v) = A \cdot v + w \qquad \text{o} \qquad f(v) = B \cdot v + w$$

portano r in s.

b) Consideriamo una trasformazione della forma $f(v) = A \cdot v + w$ con $w \in s$ allora f ha un punto fisso se e solo se l'equazione

$$(A - \mathsf{I}) \cdot v = w$$

ha soluzione. Se $v = (x, y, z)$ e $w = v_0 + t\, v_1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -x + z = -1 \\ 0 = 1 + t \\ -x - z = -t \end{cases}$$

quindi per $t = -1$ ha un punto fisso e per $t \neq -1$ non ha punti fissi.

c) Una tale riflessione non esiste. Infatti sia π un piano e R la riflessione associata e supponiamo che $R(r) = s$. Allora se fosse $\pi \cap r \neq \varnothing$ allora $r \cap \pi$ sarebbe contenuto in s e quindi r e s si intersecherebbero. Ma r e s non si intersecano. Se invece $r \cap \pi = \varnothing$ allora r e π sono paralleli e quindi $R(r)$ è parallelo ad r. Ma r ed s non sono paralleli e quindi una tale trasformazione non esiste.

Esercizio 4. La matrice associata a g_a rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) per $a = 0$ otteniamo che i tre determinanti delle sottomatrici 1×1 e 2×2 in alto a sinistra e di tutta la matrice sono uguali a $1, -1, 1$. Quindi la segnatura è $(1, 2, 0)$. In una questo caso esiste sempre una base di vettori isotropi, per esempio nel nostro caso e_3, $e_1 + e_2$ $e_1 + e_3/2$ è una base fatta di vettori isotropi.

b) per $a = 1$ la matrice associata ha già forma diagonale e possiamo subito calcolare la segnatura che risulta uguale a $(2, 0, 1)$. In questo caso c'è una unica retta di vettori isotropi che nel nostro caso è la retta $\mathbb{R}e_2$. Quindi non esiste una base di vettori isotropi.

c) non esiste infatti conserverebbe il prodotto scalare ma $g_2(e_1, e_1) = 1$ mentre $g_2(e_3, e_3) = 2$.