A COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 21 FEBBRAIO 2017: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: $rango\,(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×2: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim W = 2$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

B COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 21 FEBBRAIO 2017: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = -Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: $rango\,(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×3: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 3}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 2$ e $\dim W = 3$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.

b) Esistono due applicazioni lineari

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} : p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1,-1,0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.

b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli z complessi tali che $z^4\bar{z} = 32$.

Esercizio 4. Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.

b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).

c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

Soluzioni prima parte versione A

Domanda 1. $z = 1 + i$ e $z = -1 - i$.

Domanda 2. $p_A(t) = -(t-2)(t-1)(t+1) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$.

Domanda 3. $\varphi_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + y + z$.

Domanda 4. $rango(F) = 2$.

Domanda 5. $\dim U = 3$.

Soluzioni prima parte versione B

Domanda 1. $z = 1 - i$ e $z = -1 + i$.

Domanda 2. $p_A(t) = -(t+2)(t-1)(t+1) = -t^3 - 2t^2 + t + 2$.

Domanda 3. $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z.$

Domanda 4. $rango(F) = 3$.

Domanda 5. $\dim U = 5$.

Soluzioni seconda parte

Esercizio 1. a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K e sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare allora

$$\dim V = \dim \ker F + \dim\, Im\, F.$$

b) Una tale coppia di applicazioni non esiste. Infatti per il teorema della dimensione l'applicazione f ha nucleo di dimensione almeno 1 quindi esiste v non zero tale che $f(v) = 0$. Quindi anche $g(f(v)) = 0$ e $g \circ f$ non è iniettiva.

Esercizio 2. a)Una base di W è

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ed una base di V è data da

$$p_1(t) = t - 1, \qquad p_2(t) = t^2 - 1 \qquad p_3(t) = t^3 - 1$$

Abbiamo $F(w_1) = 1 - 2t + t^3 = p_3(t) - 2p_1(t)$ e $F(w_2) = 2t - t^2 - t^3 = -p_3(t) - p_2(t) + 2p_1(t)$. Quindi

$$[F]^{w_1,w_2}_{p_1,p_2,p_3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Osserviamo che e_1, w_1, w_2 è una base di $\mathbb{R}^3$ e che per definizione di G abbiamo

$$[G]^{e_1,w_1,w_2}_{1,t,t^2,t^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la matrice cercata calcoliamo la matrice di cambiamento di base $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2}$. Tale matrice è l'inversa della matrice

$$[Id]^{e_1,w_1,w_2}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare l'inversa della matrice in vari modi, procediamo per riduzione a scalini della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sommiamo la terza riga alla seconda, poi sommiamo la seconda alla prima e infine cambiamo segno alla seconda e alla terza riga. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e ricaviamo che $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2}$ è la matrice costituita dalle ultime tre colonne della matrice appena calcolata. Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_2}_{1,t,t^2,t^3} = [G]^{e_1,w_1,w_2}_{1,t,t^2,t^3} \cdot [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $\rho \geqslant 0$ il modulo di z e $\theta \in [0, 2\pi)$ l'argomento. Abbiamo $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ e quindi $32 = z^4 \bar{z} = \rho^5 e^{3i\theta}$. Da questa equazione ricaviamo $\rho^5 = 32$ da cui $\rho = 2$ e $3\theta = 0$ come angolo ovvero $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Quindi le soluzioni sono

$$z = 2e^0 = 2 \qquad z = 2e^{2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3} \qquad z = 2e^{4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$$

Esercizio 4. Tutte le colonne della matrice A sono uguali quindi L_A ha rango 1 e di conseguenza il nucleo ha dimensione 12. Il nucleo di L_A è definito dall'equazione $x_1 + \cdots + x_{13} = 0$ ovvero $x_1 = -x_2 - x_2 \cdots - x_{13}$. Una base del nucleo è quindi data da $v_i = e_1 - e_i$ per $i = 2, \ldots, 13$.

Notiamo che se v_1 è il vettore con tutte le entrate uguali a 1, abbiamo $L_A(v_1) = 13\, v_1$. Quindi $v_1, \cdots, v_{13}$ sono una base di autovettori e abbiamo

$$[L_A]^{v_1 \ldots v_{13}}_{v_1 \ldots v_{13}} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di L_A è quindi uguale a $t^{12}(13 - t) = 13\, t^{12} - t^{13}$.