1. Compito di Geometria e algebra lineare del 29 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si dia la definizione di prodotto scalare;
b) Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1,2,0)$. Si dica se esiste un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione uno sul quale g è nullo;
c) Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1,1,1)$. Si dica se esiste un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due sul quale g è nullo.

Esercizio 2. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso delle matrici complesse 2×2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definiamo l'applicazione lineare $C_A : E \longrightarrow E$ mediante la formula

$$C_A(X) = AX - XA.$$

a) Supponiamo che il polinomio caratteristico di A sia $t^2 - 1$. Calcolare il polinomio caratteristico di C_A e dire se è diagonalizzabile.
b) Poniamo $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = -1$. Si calcoli il polinomio caratteristico di C_A, e se ne determini la forma di Jordan.

Esercizio 3. Siano U e W i piani affini di $\mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente dalle equazioni $x+3y-z = 0$ e $x + 3y - z = 1$. Sia P_U la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U.

a) Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare P_U rispetto alla base standard.
b) Dato $v \in \mathbb{R}^3$ determinare il punto di W che ha minima distanza da v in funzione di v.

Esercizio 4. Sia g_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$g_a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 + a\, x_3\, y_3 + \frac{16}{3} x_4\, y_4 + a\, x_1\, y_3 + a\, y_1\, x_3 + x_3\, y_4 + y_3\, x_4.$$

a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare g_a è definito positivo;
b) Si determini un valore di a tale che il prodotto scalare ristretto al sottospazio W definito dalle equazioni $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ sia degenere.

Esercizio 1. a) Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una mappa $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

- $g(u, v) = g(v, u)$ per ogni $u, v \in V$;
- $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$ per ogni $u, v, w \in V$;
- $g(\lambda\, u, v) = \lambda\, g(u, v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in V$.

b) Si esiste. Infatti esiste una base ortogonale u_1, u_2, u_3 tale che $g(u_1, u_1) = 1$ e $g(u_2, u_2) = g(u_3, u_3) = -1$. Allora g ristretta alla retta generata da $v = u_1 + u_2$ è nulla.

c) Si esiste. Infatti esiste una base ortogonale u_1, u_2, u_3 tale che $g(u_1, u_1) = 1$ e $g(u_2, u_2) = -1$ e $g(u_3, u_3) = 0$. Allora g ristretta al piano generato da $v = u_1 + u_2$ e da u_3 è nulla.

Esercizio 2. a) Se A è diagonale, ovvero se $b = c = 0$ otteniamo che

$$[C_A]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi è diagonalizzabile. Se A è diagonalizzabile allora esiste G invertibile e D diagonale tale che $A = G \cdot D \cdot G^{-1}$. Osserviamo che

$$C_A(X) = GDG^{-1}X - XGDG^{-1} = G \cdot (DG^{-1}XG - G^{-1}XGD) \cdot G^{-1}$$

Consideriamo quindi la trasformazione $T_G(X) = GXG^{-1}$ e osserviamo che $T_G^{-1}(X) = G^{-1}XG$. Dalla formula precedente ricaviamo

$$C_A = T_G \circ C_D \circ T_G^{-1}$$

In particolare C_A e C_D sono simili e essendo C_D diagonalizzabile lo è anche C_A.

In particolare se il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2 - 1$ allora A è diagonalizzabile con autovalori $1, -1$ quindi C_A è diagonalizzabile con autovalori $2, -2$ con molteplicità 1 e 0 con molteplicità 2. [Si può fare anche in modi diversi da questo, calcolando che il polinomio caratteristico di C_A è $t^2(t^2 - 4)$.]

b) Se scriviamo la matrice associata a C_A rispetto alla base standard di E otteniamo:

$$[C_A]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di questa matrice è due e il polinomio caratteristico è t^4, quindi l'unico autovalore è zero e la forma di Jordan avrà due blocchi: di dimensione 1 e 3 o di dimensione 2 e 2. Per discrimanare il caso nel quale ci troviamo calcoliamo il rango di C_A^2 che nel primo caso sarebbe 1 e nel secondo 0.

$$[C_A^2]^{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

dal quale deduciamo che il rango di C_A^2 è uno. Quindi la forma di Jordan sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) a) Sia u il vettore $(1, 3, -1)$. Allora

$$P_U(v) = v - \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}u.$$

Quindi la matrice associata a P_U rispetto alla base standard è

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Sia r la retta per v ortogonale a W e sia v' l'intersezione di questa retta con W, ovvero la proiezione ortogonale di v su W. Allora

Sia v' è il punto di W più vicino a v. Infatti se u è un altro punto di W allora per il teorema di Pitagora

$$\|v - u\| = \sqrt{\|v - v'\|^2 + \|v' - u\|^2} \geqslant \|v - v'\|$$

e l'uguaglianza vale solo per $u = v'$.

Quindi se u_0 è un qualsiasi punto di W, per esempio $u_0 = (1, 0, 0)$ allora $v' - u_0$ è la proiezione ortogonale di $v - u_0$ su $W - u_0 = U$. Quindi $v' - u_0 = P_U(v - u_0)$ ovvero

$$v' = P_U(v - u_0) + u_0 = A \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. a) La matrice associata a g_a rispetto alla base standard è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16/3 \end{pmatrix}$$

e i determinanti delle sottomatrici quadrate, 1×1, 2×2, 3×3 e di tutta la matrice sono uguali a

$$1, 3, 3(a - a^2), -16(a^2 - a + 3/16).$$

Il prodotto scalare è definito positivo se tutti questi determinanti sono positivi, ovvero se $1/4 < a < 3/4$.

b) Una base del sottospazio in questione è data dai vettori $u = (1, -1, 0)$ e $(0, -1, 1)$ e la matrice associata alla restrizione di g_a a W rispetto a questa base è la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3+a \\ 3+a & 3+a \end{pmatrix}$$

che per $a = 1$ o $a = -3$ è degenere.