Compito di Geometria e algebra lineare del 26 giugno 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Svolgi i punti seguenti:

a) Scrivi la definizione di prodotto hermitiano e di matrice hermitiana.
b) Dimostra che gli autovalori di una matrice hermitiana sono sempre numeri reali.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi in x di grado al massimo due. Considera l'endomorfismo $F\colon V \to V$ dato da

$$F(p) = p' + 4x^2 p(0)$$

dove p' indica la derivata di p.

a) L'endomorfismo F è diagonalizzabile?
b) Considera lo stesso endomorfismo F definito sui complessi, cioè con $V = \mathbb{C}_2[x]$. È diagonalizzabile?
c) Nelle domande precedenti, nei casi in cui sia diagonalizzabile, trova una base di autovettori.

Esercizio 3. Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette affini incidenti e ortogonali. Sia $R_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo θ intorno ad r e $S_\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo φ intorno ad s.

(1) Sia $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$. Mostra che la composizione $R_\theta \circ S_\varphi$ è una rotazione intorno ad un asse e calcola l'angolo di rotazione.
(2) Per quali valori degli angoli φ e θ le isometrie R_θ e S_φ commutano? (Ricordiamo che le isometrie commutano se $R_\theta \circ S_\varphi = S_\varphi \circ R_\theta$.)

Esercizio 4. Sia $V = M(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia inoltre

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica 2×2 fissata, sempre a coefficienti reali. Definiamo una applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$g(X, Y) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}X\, S\, Y) \qquad \text{per ogni } X, Y \in V.$$

a) Dimostra che g è un prodotto scalare.
b) Calcola la segnatura di g se $a = c = 0$ e $b \neq 0$.
c) Dimostra che se la matrice simmetrica S è definita positiva allora anche il prodotto scalare g è definito positivo.

1. Soluzioni

Esercizio 1. Svolto a lezione. Una matrice hermitiana rappresenta un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto hermitiano euclideo di $\mathbb{C}^n$, quindi il punto b) si riduce a mostrare che gli autovalori di un endomorfismo autoaggiunto sono reali.

Esercizio 2. La matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(x) = x^3 - 8.$$

Ha solo una radice reale 2, quindi non è diagonalizzabile. Sui complessi, ha tre radici complesse distinte, quindi è diagonalizzabile. Le radici sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_{2,3} = 2\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

quindi

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1+\sqrt{3}i, \qquad \lambda_3 = -1-\sqrt{3}i.$$

Una base di autovettori corrispondenti è data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3}i \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Quindi tornando ai polinomi troviamo gli autovettori

$$1+2x+2x^2, \qquad (1-\sqrt{3}i)-4x+2(1+\sqrt{3}i)x^2, \qquad (1-\sqrt{3}i)+2(1+\sqrt{3}i)x-4x^2.$$

Esercizio 3. Scegliamo un sistema di riferimento ortonormale in cui l'origine è l'intersezione fra r e s e le rette ortogonali r ed s sono gli assi x e y. In questo sistema di riferimento le rotazioni si scrivono come

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

In particolare abbiamo

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{\frac{\pi}{2}} \circ S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La composizione di due rotazioni è sempre una rotazione. L'angolo di rotazione di $R_\theta \circ S_\varphi$ in questo caso è un angolo α tale che $1+2\cos\alpha = 0$ e quindi $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, cioè $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Per quanto riguarda la commutatività, veirifichiamo che

$$R_\theta S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad S_\varphi R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Se $\theta = 0$ oppure $\varphi = 0$, una delle due matrici è l'identità e quindi chiaramente commutano. Se θ e φ sono entrambi diversi da zero, allora $R_\theta S_\varphi = S_\varphi R_\theta$ se e solo se $\sin\varphi = \sin\theta = 0$. Quindi le matrici commutano anche nel caso $\theta = \varphi = \pi$.

Esercizio 4.

a) Per la bilinearità:

$$\begin{aligned} g(X+X',Y) &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}(X+X')SY) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}XSY + {}^{\mathrm{t}}X'SY) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}XSY) + \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}X'SY) \\ &= g(X,Y) + g(X',Y) \\ g(\lambda X, Y) &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}(\lambda X)SY) = \mathrm{Tr}(\lambda\, {}^{\mathrm{t}}XSY) = \lambda\,\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}XSY) = \lambda g(X,Y). \end{aligned}$$

Per la simmetria, usiamo le relazioni $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A)$ e ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ e troviamo

$$g(X,Y) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}XSY) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XSY)) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}Y\,{}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}X)) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}YSX) = g(Y,X).$$

b,c) La matrice associata a g nella base $\mathcal{B} = \{e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{22}\}$ è

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

A questo punto è chiaro che gli autovalori di questa matrice sono gli stessi di quelli di S, con molteplicità doppie. Quindi se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ otteniamo che la segnatura è $(2, 2, 0)$. Se invece S è definita positiva, ha tutti autovalori positivi, e allora anche la matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ ha tutti autovalori positivi, quindi è definita positiva.