SISTEMI LINEARI E MATRICI

1° SISTEMI LINEARI E MATRICI

Consideriamo un sistema di equazioni lineari nelle incognite $x_1 \dots x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ il sistema si può riscrivere nella forma

$$Ax = b$$

La matrice $m \times n$ A si dice la matrice associata al sistema e la matrice $m \times (n+1)$ $(A \ b)$ si dice la matrice completa associata al sistema.

Nel corso abbiamo descritto:

- come capire quando il sistema ha soluzione.
- come descrivere le soluzioni del sistema.

② IL CASO DELLE MATRICI INVERTIBILI

SIA A UNA MATRICE $n \times n$ CHE HA SIA UNA INVERSA DESTRA CHE SINISTRA, IN TAL CASO ABBIAMO VISTO L'INVERSA DESTRA E SINISTRA COINCIDONO. INOLTRE L'INVERSA È UNICA E SI INDICA CON A^{-1},

ALLORA IL SISTEMA

$$A x = b$$

HA COME UNICA SOLUZIONE $x = A^{-1} b$

dim

devo dimostrare

1) che $x = A^{-1} b$ è soluzione

in fatti: $A \cdot (A^{-1} b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b$

$$= I_n \cdot b$$

$$= b$$

2) che non ci sono altre soluzioni

infatti se $A y = b$ allora

$$A^{-1}(A y) = A^{-1} b$$

e $y = A^{-1} \cdot (A \cdot y) = A^{-1} b = x$

#

Esercizio

1) Se A ha una inv. destra il sistema ha sempre soluzione

2) Se A ha una inv. sinistra il sistema ha al più una soluzione.

3 SISTEMI EQUIVALENTI E TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Due sistemi $Ax = b$ e $A'x = b'$ si dicono EQUIVALENTI se hanno le stesse soluzioni.

Ci sono tre operazioni che trasformano un sistema in uno equivalente

R_{ij} : scambiare la riga i-esima con la j-esima

$R_i(\alpha)$: moltiplicare la riga i-esima per un numero α diverso da zero

$R_{ij}(\alpha)$: sommare alla riga i-esima la j-esima moltiplicata per α.
α è qualsiasi ma deve essere $j \neq i$.

È chiaro che se x è una soluzione del sistema originale allora lo è anche del sistema trasformato. Inoltre possiamo tornare al sistema originale applicando le stesse trasformazioni, infatti:

- se applico due volte l'operazione R_{ij} torno al sistema iniziale
- se applico $R_i(\alpha)$ e poi $R_i(\alpha^{-1})$ torno al sistema iniziale
- se applico $R_{ij}(\alpha)$ e poi $R_{ij}(-\alpha)$ torno al sistema iniziale

quindi è anche vero che se x è una soluzione del problema trasformato lo è anche del sistema originale

4) MATRICI ELEMENTARI

Sia M_{ij} la matrice

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & i & & j & \end{matrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{matrix} \\ \\ - i \\ \\ - j \\ \\ \end{matrix}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

$$
M_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

$$
M_{ij}(\alpha) =
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \qquad\qquad j \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & & \alpha & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{matrix} - i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

ESERCIZIO

1) $M_{ij} \cdot M_{ij} = I$
2) $M_i(\alpha)\, M_i(\alpha^{-1}) = I \qquad \alpha \neq 0$
3) $M_{ij}(\alpha)\, M_{ij}(-\alpha) = I \qquad i \neq j$

Si noti che

- L'OPERAZIONE R_{ij} CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER M_{ij}
- L'OPERAZIONE $R_i(\alpha)$ CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER $M_i(\alpha)$
- L'OPERAZIONE $R_{ij}(\alpha)$ CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER $M_{ij}(\alpha)$

5 MATRICI A SCALINI E A SCALINI IN FORMA FORTE

UNA MATRICE SI DICE <u>A SCALINI</u> SE LA PRIMA ENTRATA DIVERSA DA ZERO NELLA RIGA $i+1$-ESIMA È PIÙ A DESTRA DELLA PRIMA ENTRATA DIVERSA ZERO NELLA RIGA i-ESIMA. IN TAL CASO LE PRIME ENTRATE DIVERSE DA ZERO SI DICONO <u>PIVOT</u>

<u>Esempio</u> Matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{} = \text{PIVOT}$$

<u>Esempio</u> Matrice <u>non</u> a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IL NUMERO DELLE RIGHE DIVERSE DA ZERO DI UNA MATRICE A SCALINI SI DICE <u>IL RANGO</u> DELLA MATRICE

UNA MATRICE A SCALINI SI DICE <u>A SCALINI IN FORMA FORTE</u> SE TUTTI I PIVOT SONO UGUALI A 1 E SE LE ENTRATE SOPRA I PIVOT SONO TUTTE UGUALI A ZERO.

<u>Esempio</u> matrice a scalini in forma forte.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SE LA MATRICE X È A SCALINI È FACILE RIDURLA IN FORMA FORTE USANDO $R_i(\alpha)$ e $R_{ij}(\alpha)$

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2(1/4)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3(1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_{23}(-1/4)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}\left(-\frac{5}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}\left(-\frac{3}{2}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 5/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

= INDICO L'ENTRATE CHE "NON MI PIACE"

= INDICO L'ENTRATA CHE HO "SISTEMATO" CON LA TRASFORMAZIONE

SI NOTI CHE LE POSIZIONI DEI PIVOT NON SONO CAMBIATE

6 SISTEMI ASSOCIATI A MATRICI A SCALINI

SE UN SISTEMA È ASSOCIATO AD UNA MATRICE A SCALINI ALLORA È PARTICOLARMENTE SEMPLICE DIRE SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE

INOLTRE SE IL SISTEMA È ASSOCIATO AD UNA MATRICE A SCALINI IN FORMA FORTE È ANCHE PARTICOLARMENTE SEMPLICE SCRIVERE ESPLICITAMENTE LE SOLUZIONI

SIA $X = (A \; b)$ LA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA E SUPPONIAMO CHE SIA A SCALINI, LE VARIABILI CORRISPONDENTI AI PIVOT DI A LE CHIAMO VARIABILI DIPENDENTI E LE ALTRE LE CHIAMO VARIABILI LIBERE.

TEOREMA (ROUCHÉ - CAPELLI)

SIA $A \in Mat_{m \times n}$, $b \in K^m$ e $X = (A, b)$.

SE X È A SCALINI

1) IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE RANGO (X) = RANGO $(A) = d$

2) SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE ALLORA CI SONO d VARIABILI DIP. CHE INDICO CON $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$ e $n-d$ INDIP. CHE INDICO CON $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$.

ESISTE UNA MATRICE C $d \times (n-d)$ e UN VETTORE $f \in K^d$ TALE CHE LE SOLUZIONI SONO LE y, z TALI CHE

$$y = f + Cz$$

ILLUSTRIAMO LA DIM. DEL TEOREMA CON UN ESEMPIO. FACCIAMO IL CASO DI UNA MATRICE A A SCALINI IN FORMA FORTE.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

= PIVOT

LE VARIABILI LIBERE SONO $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$

LE VARIABILI DIP. SONO $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$

IL SISTEMA ASSOCIATO A $(A\ b)$ È

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_5 = b_1 \\ x_4 + 4x_5 = b_2 \\ x_6 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE NELLA FORMA

$$\begin{cases} x_2 = b_1 - 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = b_2 - 4x_5 \\ x_6 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

ORA IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $b_4 = 0$ OVVERO $\text{Rango}(X) = \text{Rango}(A)$.

E SE $b_4 = 0$ LE SOLUZIONI SONO LE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \text{ TALI CHE } \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{f} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{Z}$$

LE CONCLUSIONI RIMANGONO INALTERATE QUANDO PARTIAMO DA UN SISTEMA A SCALINI: PRIMA RIDUCIAMO IL SISTEMA A SCALINI IN FORMA FORTE COME ILLUSTRATO PRIMA (QUESTO NON CAMBIA IL NUMERO DI RIGHE DIVERSO DA ZERO E LA POSIZIONE DEI PIVOT), QUINDI CONCLUDIAMO COME SOPRA.

7 RIDUZIONE DI UNA MATRICE QUALSIASI A SCALINI

OGNI MATRICE PUÒ ESSERE TRASFORMATA IN UNA MATRICE A SCALINI

SI PROCEDE PER COLONNE: PRIMA SI SISTEMANO LE ENTRATE DELLA PRIMA COLONNA, POI DELLA 2ª ETC.

$$
\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}
$$

- LA PRIMA COLONNA È A POSTO
- LA SECONDA COLONNA NON È A POSTO PERCHÉ L'ENTRATA VIOLA LA REGOLA CHE LE PRIME ENTRATE DIVERSE DA ZERO SONO SEMPRE PIÙ A DESTRA SCENDENDO
- SISTEMO QUESTO PROBLEMA SCAMBIANDO LE PRIME DUE RIGHE.

$$
\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}
\xrightarrow{R_{12}}
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}
\xrightarrow{R_{31}(-2)}
$$

$$
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}
\xrightarrow{R_{23}}
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}
\xrightarrow{R_{42}(-1)}
$$

$$
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}
\xrightarrow{R_{43}\left(-\frac{1}{4}\right)}
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
$$

= ENTRATE CHE NON MI "PIACCIONO" E CHE VOGLIO SISTEMARE.

= PIVOT

8 SOLUZIONE DI UN SISTEMA QUALSIASI

CIÒ CHE ABBIAMO SPIEGATO NEI PUNTI 6 E 7 FORNISCE UN SISTEMA PER RISOLVERE UN SISTEMA QUALSIASI:

- SI PARTE DAL SISTEMA $Ax = b$
- SI RIDUCE LA MATRICE $(A \; b)$ A SCALINI
- SI CONCLUDE COME NEL PUNTO 6

VORREMMO FARE QUALCOSA DI PIÙ: VORREMMO DEFINIRE IL RANGO DI UNA MATRICE NON SOLO NEL CASO DI MATRICI A SCALINI E VORREMMO DARE UN SIGNIFICATO AL NUMERO DI VARIABILI LIBERE.

UNA POSSIBILE DEFINIZIONE È LA SEGUENTE

PRENDI UNA MATRICE X E RIDUCILA A SCALINI OTTENENDO Y. DEFINIAMO $\text{RANGO}(X) = \text{RANGO}(Y)$.

TUTTAVIA UNA MATRICE SI PUÒ RIDURRE A SCALINI IN TANTI MODI DIVERSI, E NON È CHIARO CHE SI OTTERREBBE SEMPRE LO STESSO NUMERO.

NOI ABBIAMO RISOLTO QUESTO PROBLEMA INTRODUCENDO IL CONCETTO DI DIMENSIONE

DI UNO SPAZIO VETTORIALE

IN QUELLO CHE SEGUE UTILIZZERÒ QUESTI CONCETTI CHE NEL CORSO SONO STATI INTRODOTTI PIÙ AVANTI

3 NUCLEO E SISTEMI OMOGENEI (= LEZ 25 NOV)

FACCIAMO IL CASO DI $b=0$ OVVERO DEL SISTEMA $Ax=0$.

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO QUINDI

$$N(L_A) = \{x \in K^n : A \cdot x = 0\}$$

SE A È A SCALINI ALLORA INDICO CON

d IL NUMERO DI RIGHE NON NULLE E

$n-d=\ell$ IL NUMERO DELLE VARIABILI LIBERE

PROPOSIZIONE

$$d = \dim \operatorname{Im} L_A$$

$$n-d = \ell = \dim N(L_A)$$

La dimostrazione della proposizione fornisce anche una base di $N(L_A)$.

dim

Siano $x_{v_1} \dots x_{v_d}$ LE VAR. DIP

E $x_{j_1} \dots x_{j_\ell}$ LE VAR. LIBERE $\ell = n-d$.

SAPPIAMO CHE ESISTE UNA MATRICE $d \times (n-d)$

TALE CHE LE SOLUZIONI SONO LE x TALI

CHE

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix}}_{= y} = C \underbrace{\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_\ell} \end{pmatrix}}_{= z}$$

SE PONGO $x_{j_t} = 0$ PER $t \neq s$ E $x_{j_s} = 1$

OTTENGO UNA PARTICOLARE SOLUZIONE

$$v_s = e_{j_s} + w_s \qquad \text{CON } w_s \in \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_d} \rangle$$

E $v_1, \dots, v_\ell$ SONO UNA BASE DEL NUCLEO.

QUINDI $\dim N(L_A) = \ell$ E $\dim \operatorname{Im}(L_A) =$
$n - \dim N(L_A) = n - \ell = n - (n-d) = d$.

#

QUINDI LA DEFINIZIONE DI RANGO DATA IN COINCIDE CON $\dim(\operatorname{Im} L_A)$.

(10) SISTEMI NON OMOGENEI (= LEZ. 25 NOV).

CONSIDERIAMO IL SISTEMA

$$Ax = b$$

TEOREMA (ROUCHÉ - CAPELLI 2)

1) IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $b \in \operatorname{Im} L_A$

2) IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $\text{Rango}(A) = \text{rango}(A\, b)$

3) Se v_0 è una soluzione del sistema le altre soluzioni sono i vettori della forma $v_0 + v$ con $v \in N(L_A)$.

dim

1) è la definizione di $\mathrm{Im}\, L_A$

2) rango $A = \dim \mathrm{Im}\, L_A =$

$$= \dim \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonne di } A}}{A_{(1)}} \quad A_{(n)} \rangle$$

$$\text{rango } (A\ b) = \dim L_{A,b} =$$

$$= \dim \langle A_{(1)} \cdots A_{(n)}\ b \rangle$$

$$b \in \mathrm{Im}\, L_A \iff b \in \langle A_{(1)} \quad A_{(n)} \rangle$$

$$\iff \langle A_{(1)} \cdots A_{(n)}\ b \rangle = \langle A_{(1)} \cdots A_{(n)} \rangle$$

DA CUI LA TESI.

3) Se v_0 È SOLUZIONE E $v \in N(L_A)$ ALLORA

$$A(v_0 + v) = Av_0 + Av = Av_0 = b$$

QUINDI $v_0 + v$ È SOLUZIONE.

VICEVERSA SE u È SOLUZIONE E $v = u - v_0$

$$Av = Au - Av_0 = b - b = 0$$

e QUINDI $v \in N(L_A)$ #

(11) RIDUZIONE A SCALINI E ESTRAZIONE DI UNA BASE

ABBIAMO USATO LA RIDUZIONE A SCALINI PER RISOLVERE IN MODO SISTEMATICO VARI PROBLEMI DI CONTI. RICORDO IL SEGUENTE

PROPOSIZIONE

SIANO $v_1 \dots v_n \in K^m$ e sia A LA MATRICE CHE HA COME COLONNE I VETTORI $v_1, \dots, v_n$. RIDUCIAMO A SCALINI A E SUPPONIAMO CHE I PIVOT SIANO NELLE COLONNE $i_1 \dots i_d$ ALLORA $v_{i_1} \dots v_{i_d}$ SONO UNA BASE DI $\langle v_1 \dots v_n \rangle$.

dim

SAPPIAMO GIÀ CHE $\dim \langle v_1 \dots v_n \rangle =$
$= \dim \operatorname{Im} L_A = d$.

SE DIMOSTRO CHE $\langle v_{i_1} \dots v_{i_d} \rangle = \langle v_1 \dots v_n \rangle = W$ ALLORA $v_{i_1} \dots v_{i_d}$ SONO UNA BASE DI W PERCHÉ SONO IN NUMERO GIUSTO.

SIA $U = \langle v_{i_1} \dots v_{i_d} \rangle$. PER DIMOSTRARE CHE $v_{i_1} \dots v_{i_d}$ GENERANO W BASTA DIMOSTRARE CHE $v_j \in U \quad \forall j$.

Se $j = i_t$ è ovvio

se $j \neq i_t$ allora x_j è una variabile libera

E QUINDI PER LA DISCUSSIONE AL PUNTO (3) ESISTE UN VETTORE DELLA FORMA

$$x = e_j + w_j \in N(L_A)$$

con $w_j \in \langle e_{i_1} \dots e_{i_d} \rangle$.

$$w_j = \sum x_{i_t} e_{i_t}$$

allora $0 = A \cdot x = A e_j + \sum x_{i_t} A e_{i_t} =$

$$= v_j + \sum x_{i_t} v_{i_t}$$

ovvero $v_j = - \sum x_{i_t} v_{i_t} \in U$

#