SABATO 3 DICEMBRE

DETERMINANTI

<u>PROPOSIZIONE</u> A UNA MATRICE $n \times n$

$\det(A) \neq 0$ se e solo se A È INVERTIBILE

<u>dim</u>

INIZIAMO A RIDURRE A SCALINI A USANDO SOLO LE MOSSE R_{ij} = scambio di due righe

e $R_{ij}(\alpha)$ = somma alla riga i α-volte la riga j.

QUESTE OPERAZIONI AL MASSIMO CAMBIANO IL SEGNO DEL DET.

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} \boxed{3} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2/3} \end{matrix}$$

UTILIZZANDO QUESTE DUE SOLE OPERAZIONI POSSO PORTARE LA MATRICE NELLA FORMA

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & * & & & \\ 0 & a_2 & & * & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

—

$$\det A = \pm \det A' = \pm\, a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdot a_n$$

[Esempio $a_1 \dots a_n$ non è detto che siano i pivot!

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

]

In PARTICOLARE $\det(A) \neq 0$ SE E SOLO SE $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$.

INOLTRE A È INVERTIBILE SE E SOLO SE A' (CHE È RIDOTTA A SCALINI) HA RANGO n OVVERO TUTTE LE RIGHE $\neq 0$.

O ANCHE A' HA n PIVOT.

E INFINE OSSERVIAMO CHE A' HA RANGO PRECISAMENTE QUANDO $a_1, \dots, a_n \neq 0$

#

ESEMPI

$$\begin{cases} kx + y = 3 \\ x + ky = 4 \end{cases}$$

Per quali k il sistema ha soluzione?

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se A è invertibile il sistema ha una e una sola soluzione

infatti $L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è bigettiva.

Le sol. sono $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\underbrace{L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} kx + y \\ x + ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$

$A \cdot v = b \qquad v = A^{-1} b$

$\det A = \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = k^2 - 1$

in particolare per $k \neq \pm 1$ A è invertibile.

per $k = \pm 1$ dobbiamo studiare nel dettaglio il sistema.

DEFINIZIONE DEL DETERMINANTE

PERMUTAZIONI DI n ELEMENTI

$I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

UNA PERMUTAZIONE DI I È UNA FUNZIONE $f : I \longrightarrow I$ bigettiva.

$S_n = \{$ permutazioni di $I \}$

ESR $n = 2$

$1 \longrightarrow 1 \qquad f(1) = 1$

$2 \longrightarrow 2 \qquad f(2) = 2$

$g(1) = 2 \quad g(2) = 1$

$$S_2 = \{ id, g \}$$

__ESR__ $\quad \text{card } S_n = ?$

per $f(1)$ ho n possibilità

per $f(2)$ ho $n-1$ " " "

$f(3)$ $n-2$ " " "

$\vdots$

$f(n)$ ho 1 sola possibilità.

QUINDI $\quad \text{card } S_n = n!$

__ESR__ DESCRIVERE S_3

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \leftarrow \text{ i numeri di partenza.}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
1 & 3 & 2 \\
\hline
2 & 1 & 3 \\
\hline
2 & 3 & 1 \\
3 & 1 & 2 \\
3 & 2 & 1
\end{array}$$

$f(1) = 2 \quad f(2) = 1 \quad f(3) =$

__ESR.__

$$\begin{pmatrix} 1 < 2 < 3 & 4 \\ 4 > 1 < 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$f(1) = 4 \quad f(3) = 2$

$f(2) = 1 \quad f(4) = 3$

DEFINIZIONE SEGNO DI UNA PERM.

$$f : I \longrightarrow I$$

$$\varepsilon(f) = \text{segno}(f) = (-1)^{\ell(f)}$$

$$\ell(f) = \{ i < j \quad i,j \in I : \underline{f(i) > f(j)} \}$$

$$\varepsilon(f) = \frac{\prod_{i<j} (j - i)}{\prod_{i<j} (f(j) - f(i))}$$

ESR

$n = 2$

$\text{id} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 1 < 2 \qquad \ell = 0$

$\varepsilon = 1$

$f \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(1) = 2 \quad f(2) = 1$

$1 < 2 \qquad f(1) = 2 > f(2) = 1$

$\ell = 1 \qquad \varepsilon = (-1)^{\ell} = -1$

ESR $n=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left. \begin{array}{ll} 1 < 2 & f(1) > f(2) \\ 1 < 3 & \\ 2 < 3 & \end{array} \right) \ell = 3$$

$$\varepsilon = (-1)^3 = -1.$$

$$\varepsilon(f) = \frac{\prod_{i<j} (j-i)}{\prod_{i<j} (f(j)-f(i))} = \frac{(3-1)(3-2)(2-1)}{(1-3)(1-2)(2-3)}$$

$$= = -1$$

DEFINIZIONE $\quad A$ MATRICE $n \times n$

$$A = (a_{ij})$$

$$\det A = \sum_{\underbrace{f \in S_n}} \underline{\underline{\varepsilon(f)}} \cdot \underbrace{a_{1f(1)} \, a_{2f(2)}} \cdots\cdots a_{nf(n)}$$

ESEMPIO $\quad n=2$

$$S_2 = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = g \right\} \qquad \varepsilon(id) = 1 \qquad \varepsilon(g) = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{1} \cdot a_{11} \cdot a_{22}}_{f = id} + \underbrace{\underline{(-1)} \cdot a_{12} \cdot a_{21}}_{f = g}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$a_{i\,f(i)}$ $\qquad f = id \qquad a_{ii}$

$f = g \qquad a_{1\,f(1)} = a_{12}$

$\qquad\qquad a_{2\,f(2)} = a_{21}$

$\underline{n=3}$	$\underline{id}$	g_2	g_3	$\underline{g_4}$	$\underline{g_5}$	g_6
S_3	$\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\end{matrix}$	$\boxed{\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\end{matrix}}$	$\begin{matrix}1&2&3\\2&1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\end{matrix}$
	1	-1	-1	1	1	-1

$$\varepsilon(f) \quad e_{1f(1)} \quad e_{2f(2)} \quad e_{3f(3)}$$

$$
f = \begin{array}{lcllll|l}
id & + & e_{11} & \cdot\, e_{22} & \cdot\, e_{33} & & \cdot 1 \\
g_2 & - & e_{11} & \cdot\, e_{23} & \cdot\, e_{32} & & \cdot 5 \quad g_2(1) \quad g_2(2) \\
g_3 & - & e_{12} & e_{21} & e_{33} & & \cdot 6 \\
g_4 & + & e_{12} & e_{23} & e_{31} & & \cdot 2 \\
g_5 & + & e_{13} & e_{21} & e_{32} & & \cdot 3 \\
g_6 & - & e_{13} & \cdot\, e_{22} & \cdot\, e_{31} & & \cdot 4
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}
\begin{matrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \\ e_{31} & e_{32} \end{matrix}
$$

4 · 5 · 6 · 1 · 2 · 3

$-$ $+$

$$
\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

TEOREMA

IL DETERMINANTE COME L'ABBIAMO APPENA DEFINITO HA LE PROPRIETÀ 1) 2) 3) 4) ELENCATE IERI. E INOLTRE

$$\det\begin{pmatrix} X^1 \\ X^i + Y^i \\ X^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X^1 \\ X^i \\ X^n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^i \\ X^n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} X^1 \\ Z \\ Z \\ X^n \end{pmatrix} = 0 .$$

ESEMPI

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$