DESCRIZIONE DI SOTTOSP.

PARAMETRIZZARE UN SOTTOSP.

Sia $W \subset V$ un sottospazio e sia

$w_1 \dots w_m$ una base di $\underline{\underline{W}}$.

$$F : K^m \longrightarrow V$$

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{x_1 w_1 + \dots + x_m w_m}}$$

- F è lineare
- F è iniettiva
- $\mathrm{Im}\, F = W$

DEFINIZIONE Se $W \subset V$ una parametr.

di W è una $F : K^m \longrightarrow V$

- F è lineare
- F è iniettiva
- $\mathrm{Im}\, F = W$

OSSERVAZIONE Se $F : K^m \longrightarrow V$ è una param.

di W allora

$$w_1 = F(e_1) \quad \dots \quad w_m = F(e_m)$$

è una base di W.

DESCRIZIONE CARTESIANA DI SOTTOSP.

DEFINIZIONE Se W è un sottosp. vett. di V e $G : V \longrightarrow K^n$ è una descrizione cartesiana di W se

- G è lineare
- $N(G) = W$

Esempio

$$V = K^4$$

$$\left[\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in K^4 : \quad \begin{array}{l} \mathrm{I.} \\ \mathrm{II.} \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \right.$$

$$G : V \longrightarrow K^2$$

$$G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \bullet \mathrm{I} \\ \bullet \mathrm{II} \end{array}$$

$$N(G) = W$$

PROBLEMA : Passare da una descrizione all'altra.

Da cartesiana a parametrica (un eserc. che abbiamo fatto spesso).

Consideriamo l'esempio di prima

Trovare una base di W.

$$\begin{array}{cccc} & & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim W = 2 = 4 - 2$$

riducendo ulteriormente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}} \quad (*)$$

una base di W la otteniamo prendendo

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 \qquad x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2$$

La stessa formula mi fornisce una param.

$$F \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad F : K^2 \longrightarrow W$$

F è una param. di W.

DALLA DESCRIZ. PARAM. A QUELLA CARTES.

Esempio $V = K^4$

$$W = \langle w_1 ; w_2 \rangle \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

trovare $G : V \longrightarrow K^m$ con $N(G) = W$.

Prima di trovare G descrivo tutte le $\varphi : V \longrightarrow K$ che si annullano su W. (ovvero $\mathrm{Ann}\, W$).

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underset{=}{a}\, x_1 + \underset{=}{b}\, x_2 + \underset{=}{c}\, x_3 + \underset{=}{d}\, x_4$$

$\varphi = 0$ su W è come chiedere

$$\varphi(w_1) = 0 \qquad e \qquad \varphi(w_2) = 0$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a+b+c+d = 0 \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a - c = 0$$

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$$ che è ess. alla

RIDUCO A SCALINI

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{matrix}}$$

$$(*) \begin{cases} a = c \\ b = -2c - d \end{cases}$$

quindi una base di $\operatorname{Ann} W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \text{vale } (*) \right\}$

$c = 1$, $d = 0$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $c = 0$, $d = 1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{x_1 - 2x_2 + x_3} \qquad \varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{-x_2 + x_4}$$

φ_1, φ_2 sono una base di $\operatorname{Ann} W$.

Pongo $G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_2 + x_4 \end{pmatrix}$

- G è lineare
- $G : V \longrightarrow K^2$
- $N(G) = W$

DETERMINANTI

$$Mat_{n\times n}(K) \supset \{A \in Mat_{n\times n} \text{ invertibili}\}$$

Se $n=2$ abbiamo visto che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ è invertibile se e solo se } ad-bc \neq 0.$$

Il determinante è una funzione

$$det_n : Mat_{n\times n}(K) \longrightarrow K$$

non è lineare!

1) $det_n(I_n) = 1$

2) Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$Y = M_{ij}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_j \\ x_i \\ x_n \end{pmatrix} \text{ scamb.}$$

$$det\, Y = -det\, X$$

3) Se $Y = M_i(\alpha) X$

(moltiplico la riga i-esima per α)

$$\det(Y) = \alpha \det(X)$$

4) Se $Y = M_{ij}(\alpha) X$

somma alla riga i-esima la j-esima moltiplicata per α

$$\boxed{\det Y = \det X.}$$

5) $\det X = \det X^t$

6) X è invertibile se e solo se $\det X \neq 0$.

ESEMPI Le proprietà 1, 2, 3, 4 bastano a calcolare il determinante.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduco X a scalini

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{M_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

det

$$\xrightarrow{M_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{M_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det X = -\det I_3 = -1$$

<u>Esempio</u>

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{X}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{M_4\left(\frac{1}{4}\right)} \underset{X_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow$$

$$\det X_1 = \frac{1}{4} \det X$$

$$\xrightarrow{M_3\left(\frac{1}{3}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{X_2} \xrightarrow{M_2\left(\frac{1}{2}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{X_3}$$

$\det X_2 = \frac{1}{3}\det X_1$ $\qquad\qquad$ $\det X_3 = \frac{1}{2}\det X_2$

$\longrightarrow$ Le operazioni che farò da ora in poi sono tutte del tipo $M_{ij}(\alpha)$ e tutte queste operazioni non cambiano il determinante.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det X_3 = \det I_4 = 1$$

$$\det X_2 = 2 \det X_3 = 2$$

$$\det X_1 = 3 \det X_2 = 6$$

$$\det X = 4 \det X_1 = 24$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \ 0 \ 0 \ 0) = $$
$$= a_1 (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$\det X = \det\begin{pmatrix} a_1\cdot(1 \; 0 \; \cdots \; 0) \\ \text{---}\; x^2 \;\text{---} \\ \\ \text{---}\; x^n \;\text{---} \end{pmatrix} =$$

x^i sono le righe di X.

$$= a_1 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 \; 0 \; \cdots \; 0 \\ a_2\,(0 \; 1 \; 0 \; \cdots \; 0) \\ x^3 \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \det\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & a_3 & \\ 0 & & & \ddots \; a_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 a_2 \quad a_n$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 7\cdot 6\cdot 5 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 \cdot (1 \ 1) \\ 0 \ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

qualsiasi cosa

$$\det X = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n .$$