VENERDI 25 NOVEMBRE

- $\boxed{\text{NUCLEO E IMMAGINE DI } L_A}$

SIA A UNA MATRICE $m \times n$. $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ $\quad L_A(v) = A \cdot v$

$$N(L_A) = \{ v \in K^n : A \cdot v = 0 \}$$

QUINDI SONO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO AD A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 : A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

PER STUDIARE $A \cdot v = 0$ RIDUCIAMO A SCALINI :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0\ \boxed{1} & \cdots & 0 \\ & & 0 & & \boxed{1} \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

SIA k IL NUMERO DELLE VARIABILI LIBERE. INDICO CON Y LE VARIABILI LIBERE E CON X QUELLE CORRISP. AI PIVOT, LE VARIABILI X SONO $n-k$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-k} \end{pmatrix}$$

SAPPIAMO CHE ESISTE UNA MATRICE C $(n-k) \times k$ TALE CHE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO LE $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ TALI CHE $X = CY$

<u>OSSERVAZIONE.</u> $\quad \dim N(L_A) = k$

DESCRIVO UNA BASE DEL NUCLEO

Sia $\quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^k \qquad$ se $Y = \varepsilon_i$

$$X = C\cdot\varepsilon_i = \delta_i \quad \text{QUINDI} \quad v_i = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix} \in N(L_A)$$

$v_1 \ldots v_k$ SONO UNA BASE DEL NUCLEO

dim. SIA $v \in N(L_A)$ QUINDI $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

e $X = C\cdot Y$. $\qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_k\varepsilon_k$

$$\begin{aligned} X = C\cdot Y &= C\cdot(y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_k\varepsilon_k) = \\ &= y_1\, C\varepsilon_1 + y_2\, C\varepsilon_2 + \cdots + y_k\, C\varepsilon_k \\ &= y_1\,\delta_1 + \cdots + y_k\,\delta_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1\delta_1 + \cdots + y_k\delta_k \\ y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_k\varepsilon_k \end{pmatrix} = \\ &= y_1\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \cdots + y_k\begin{pmatrix} \delta_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} = \\ &= y_1 v_1 + \cdots + y_k v_k \end{aligned}$$

E QUESTA SCRITTURA È UNICA.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} z_1 + 2z_2 - 2z_4 &= 0 \\ z_3 + 3z_4 &= 0 \\ z_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_5 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

$z_2 = 1$ $\quad z_4 = 0$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad z_2 = 0$ $\quad z_4 = 1$ $\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE

$$\text{rango } A = \text{rango } L_A = \dim \operatorname{Im} L_A$$

$\parallel$

n° var. con. ai pivot. $\quad n-k$

QUELLO A SINISTRA È $n-k$

$$\dim \operatorname{Im} L_A = \dim K^n - \dim N(L_A)$$
$$= n - k$$

SISTEMI LINEARI: IL RITORNO

$A \cdot v = b$

1° SUPPONIAMO ABBIA UNA SOLUZIONE v_0

1° $\quad \{v : A \cdot v = b\} = \{v_0 + u : u \in N(L_A)\}$

VERIFICA: $\quad v = v_0 + u \quad$ CON $\quad u \in N(L_A)$

$$A \cdot (v_0 + u) = Av_0 + Au = b + 0 = b$$

VICEVERSA SE $\quad Av = b \quad$ e $\quad u = v - v_0$

OVVERO $\quad v = v_0 + u$

$$Au = Av - Av_0 = b - b = 0$$

(2°) $Av = b$ ha soluzione se e solo se una delle seguenti condizioni è verificata

- (a) – $b \in \mathrm{Im}\, L_A$
- (b) – $b \in \langle A^1 \dots A^n \rangle$ $\quad A^i$ le colonne di A
- (c) – $\langle A^1 \dots A^n \rangle = \langle A^1 \dots A^n\, b \rangle$
- (d) – $\mathrm{rango}(A) = \underbrace{\mathrm{rango}(A|b)}$

questa matrice $\quad (A^1 A^2 \quad A^n\, b)$

(e) $\quad \mathrm{Im}\, L_A = \{ L_A(v) : v \in K^n \}$

$$= \{ A \cdot v : v \in K^n \}$$

(b) fatto generale $F : V \longrightarrow W$ lineare

e siano $v_1 \dots v_k$ GENERATORI DI V

allora $\langle F(v_1) \dots F(v_k) \rangle = \mathrm{Im}\, F$

infatti se $w \in \mathrm{Im}\, F$ vuol dire

$w = F(v)$ con $v \in V$.

QUINDI ESISTONO $\alpha_1 \dots \alpha_k$ E

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$w = F(v) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_k F(v_k)$

TORNANDO AD $L_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$\mathrm{Im}\, L_A = \langle L_A(e_1) \dots L_A(e_n) \rangle$$

$$L_A(e_1) = A \cdot e_1 = A^1$$

$$\dots$$

$$L_A(e_n) = A \cdot e_n = A^n$$

$b \in \mathrm{Im}\, L_A$ è come dire

$b \in \langle A^1 \dots A^n \rangle = \mathrm{Im}\, L_A$

d LO ABBIAMO OSS. A SUO TEMPO

c $\langle A^1 \dots A^n \rangle \subseteq \langle A^1 \quad A^n \quad b \rangle$

OSSERVIAMO CHE "$\subseteq$" È SICURAMENTE VERA. E CHE VALE "=" SOLO SE

$b \in \langle A^1 \dots A^n \rangle$

QUINDI CI SI RIDUCE A b

ROUCHE - CAPELLI

ISOMORFISMI

DEF. $F: V \longrightarrow W$ LINEARE SI DICE UN ISOMORFISMO SE F È BIGETTIVA E V E W SI DICONO ISOMORFI

ESEMPIO

SIA $\dim V = n$ E SIA $v_1 \dots v_n$ UNA BASE DI V.

SIA $F : V \longrightarrow K^n$ $\quad F(v) = [v]_{v_1 \dots v_n}$

F È LINEARE E BIGETTIVA.

OSSERVAZIONE

$F : V \to W$ ISOMORFISMO

SIA $G : W \longrightarrow V$ L'INVERSA DI F.

RICORDO:

$$\left[\begin{array}{ll} F(v) = w \iff & G(w) = v \\ G(F(v)) = v & F(G(w)) = w \\ G \circ F = Id_V & G \circ F = Id_W \end{array}\right.$$

ALLORA G È LINEARE E QUINDI È UN ISOMORFISMO

__dim.__

$w_1, w_2 \in W$ E VERIFICO

$$G(w_1 + w_2) = G(w_1) + G(w_2)$$

POICHÈ F È SURGETTIVA $\exists\ v_1, v_2 \in V$

$F(v_1) = w_1 \qquad F(v_2) = w_2$

E QUINDI $\quad F(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$.

QUINDI $\quad G(w_1) = v_1 \qquad G(w_2) = v_2$

$G(w_1 + w_2) = v_1 + v_2$

ANALOGAMENTE $\quad G(\lambda w) = \lambda G(w)$

#

OSSERVAZIONE $\dim V < +\infty$

$F: V \longrightarrow W$ ISOMORFISMO

ALLORA $\dim V = \dim W$

dim

$$\underset{\substack{\uparrow\\ F \text{ è surgettiva}}}{\mathrm{Im}\, F = W} \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ F \text{ è iniettiva}}}{N(F) = 0}$$

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, F + \dim N(F)$$
$$= \dim W + 0 = \dim W.$$

#

PROPOSIZIONE $\dim V < +\infty$

$F: V \longrightarrow V$ LINEARE

F È UN ISOMORFISMO $\Leftrightarrow$ F È INIETTIVA

$\Leftrightarrow$ F È SURGETTIVA

dim

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, F + \dim N(F)$$

SE F È INIETTIVA ALLORA $\dim N(F) = 0$

E QUINDI $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, F$ E QUINDI

$\mathrm{Im}\, F = V$.

SE F È SURGETTIVA ALLORA $\mathrm{Im}\, F = V$

E QUINDI $\dim N(F) = 0$ E QUINDI

F È INIETTIVA

#

CONSEGUENZA

SIA A una MATRICE $n \times n$.

1) • SE $\exists$ B $n \times n$ e $BA = Id$ ALLORA $\exists$ C $n \times n$ E $AC = Id$. E QUINDI PER QUELLO CHE ABBIAMO GIÀ VISTO $C = B$

2) • E VICEVERSA SE ESISTE $C : AC = I$ ALLORA $\exists B : BA = I$.

<u>dim</u>

A, B $n \times n$. $BA = I$.

$$L_B \circ L_A : K^n \longrightarrow K^n$$

$$L_B \circ L_A = L_{BA} = Id.$$

QUINDI L_A È INIETTIVA OVVERO $N(L_A) = 0$.

SE $L_A(v) = 0 \underset{\text{ALLORA}}{\Rightarrow} L_B(L_A(v)) = 0$ QUINDI

$$v = L_B(L_A(v)) = 0.$$

QUINDI L_A È UN ISOMORFISMO QUINDI BIGETTIVA. E SIA G L'INVERSA DI L_A

$G : K^n \longrightarrow K^n$ È LINEARE QUINDI

$G = L_C$ PER QUALCHE C $n \times n$.

$$Id = F \circ G = L_A \circ L_C = L_{AC} = L_I$$

QUINDI $AC = I$.

#