DEFINIZIONE V sp. vett. su K. $\dim V < +\infty$

$F : V \longrightarrow V$ lineare

$$m a_\lambda (F) = m a_\lambda (p_F (t))$$

si chiama la molteplicità algebrica di λ rispetto all'applicazione F.

OSSERVAZIONE V sp. vett. su K $\dim V < +\infty$

$\lambda \in K$.

1) λ è un autovalore $\Longleftrightarrow$ $m g_\lambda \geq 1$

2) λ è un autovalore $\Longleftrightarrow$ $m a_\lambda \geq 1$

2) λ è un autovalore se e solo se

$$P_F(\lambda) = 0 \quad \text{ovvero} \quad m a_\lambda \geq 1.$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo il polinomio caratt.

$$P_A (t) = \operatorname{Det} (A - t I) =$$

$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 = (t-2)^2$$

quindi c'è un solo autovalore $\lambda = 2$
di molteplicità algebrica 2

- calcoliamo la molteplicità geom.

$$V_2 = N(A - 2I)$$

$$mg_2 = \dim V_2$$

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk\, B = 1$$

$$\dim N(B) = 2 - 1 = 1$$

$$mg_2 = 1 < ma_2 = 2$$

PROPOSIZIONE 2 Nelle ipotesi di prima

$F: V \longrightarrow V$ lineare V sp. vett. su $\underline{K}$

Se F è diagonalizzabile allora

1) $ma_\lambda = mg_\lambda$

2) tutte le radici di $p_F(t)$ sono nel campo K.

dim

esempio $K = \mathbb{R}$ $F = L_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \operatorname{Det}(A - tI) =$$

$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t)$$

$$= -(t-1)^2(t-2)$$

gli autovalori sono 1 e 2

$ma_1 = 2$ $ma_2 = 1$

Calcoliamo mg_1 e mg_2

$$V_1 = N(A - I) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{z = 0\}.$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \dim V_1 = 2$$

$$mg_1 = 2$$

$$V_2 = N(A - 2I) = N\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk} = 2 \qquad \dim V_2 = 1$$

$$mg_2 = 1.$$

dim della proposizione

$F : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile.

$\exists\, v_1 \dots v_n$ base di V e $\qquad F v_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in K$.

$$[F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P_F(t) = \mathrm{Det}(F - tI) =$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & & 0 \\ & \lambda_2 - t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - t \end{pmatrix} = ,$$

$$= (\lambda_1 - t)\cdot(\lambda_2 - t)\cdot \ \dots \ \cdot(\lambda_n - t)$$

in particolare tutte le radici di p_F sono in K. Fissiamo un autovalore $\lambda = \lambda_1$ e dimostriamo che $ma_\lambda = mg_\lambda$. Supponiamo $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ e che $\lambda_i \neq \lambda$ per $i > k$.

$$[F]_{v_1 \; v_n}^{v_1 \; v_n} = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & 0 \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \mu_1 & \\ 0 & & & & & \mu_h \end{pmatrix} \qquad \mu_i \neq \lambda. \qquad h = n-k$$

$$p_F = \pm (t-\lambda)^k (t-\mu_1) \quad (t-\mu_h)$$

$$ma_\lambda = k$$

$V_\lambda = N(F - \lambda I)$. Devo calcolare il nucleo della matrice

$$[F - \lambda I]_{v_1 -- v_n}^{v_1 - v_n} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \mu_1-\lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_h - \lambda \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \; \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-k}$$

che definisce un sistema con k var. libere e quindi $mg_\lambda = \dim V_\lambda = k$ #

ESEMPI DI APP. DIAG. E NON

① $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

L_A è diagon. ?

$$P_A(t) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 + 1$$

P_A non ha radici reali quindi per la proposizione L_A non è diag.

② $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$F : V \longrightarrow V \qquad F(X) = X^t$

F è diagonalizzabile

<u>1° modo</u> Scelgo una base di V

$$\mathcal{E}: \quad \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{E_{11}}{\parallel}} \quad \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{E_{12}}{\parallel}} \quad \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{E_{21}}{\parallel}} \quad \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\overset{E_{22}}{\parallel}}$$

$1\cdot E_{11} + 0\, E_{12} + \dots 0 E_{21} = F(E_{11}) = 1\cdot E_{11} \qquad F(E_{12}) = E_{21}$

$F(E_{21}) = E_{12} \qquad F(E_{22}) = 1\cdot E_{22}$

$$[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_F = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \boxed{1-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1-t} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(1-t)} \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \underline{(1-t)}$$

$$= (1-t)^2 \, (t^2-1) = (t-1)^3 \, (t+1)$$

gli autovalori sono $\lambda = \pm 1$

$$me_1 = 3 \qquad \underline{me_{-1} = 1}$$

calcolo gli autovettori relativi a $\lambda = -1$

$$N(F - \lambda I) = N(F + I)$$

$$[F + I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

riducendo a scalini

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x=0 \\ w=0 \\ y=-z \end{matrix}$$

E_{11}
E_{12}
E_{21}
E_{22}

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è base del nucleo

$$M_1 = E_{21} - E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(M_1) = -M_1$$

Calcolo gli autovettori per l'autovalore 1

$$N(F - \lambda I) = N(F - I)$$

$$[F - I] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduco a scalini e ottengo

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \_ & & \_ & \_ \end{matrix} \qquad \underline{\underline{y = z}}$$

Le variabili libere sono x, z, w

una base del nucleo la ottengo ponendo

$x=1 \quad z=w=0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_2$

$x=0 \quad z=1 \quad w=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero $E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_3$

$x=0 \quad z=0 \quad w=1 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovvero $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_4$

$\mathcal{M}$: M_1, M_2, M_3, M_4 è una base di V.

$$\overset{M_1}{\shortparallel}\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[F]_{\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>2° modo</u>

Calcolo degli autovalori

Voglio calcolare i λ e le $M \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$

tali che $\boxed{F(M) = \lambda M}$

ovvero $\quad {}^tM = \lambda M.$

$${}^t({}^tM) = M$$

$$F(F(M)) = F(\lambda M) = \lambda F(M)$$

$$\shortparallel$$

$$M = \lambda \cdot \lambda \cdot M$$

$$M = \lambda^2 M.$$

se $M \neq 0$ deve essere $\lambda^2 = 1$ quindi $\lambda = \pm 1$

$$V_1 = \{ M : F(M) = M \} = \{ M : M^t = M \}$$

$$V_{-1} = \{ M : F(M) = -M \} = \{ M : M^t = -M \}.$$

V_1 è il sottosp. delle matrici simm.

V_{-1} è il sottosp. delle matrici antisimm.

una base di V_1 è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

una base di V_{-1} è $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$