OSS. SUL CALCOLO DEI DETERMINANTI

VOGLIAMO GENERALIZZARE LA FORMULA:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \lambda_n$$

matrici a blocchi.

esempio:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & & * & \\ 3 & 4 & & & \\ \hline 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 14 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

1) $$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} D$$

2) $$\operatorname{Det} \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix}}_{X=} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_k$$

A_i è una matrice $n_i \times n_i$

dim

1) $\Rightarrow$ 2) p.i. su k.

$k=1$ $\quad X = A_1 \quad \operatorname{Det} X = \operatorname{Det} A_1$

$k=2$ $\quad$ è il caso 1)

$k \Rightarrow k+1$

$$X = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & A_k & \\ & 0 & & A_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y & * \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}}$$

dove $\quad Y = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_h \end{pmatrix}$

$$\text{Det } X \overset{\text{D)}}{=} \text{Det } Y \cdot \text{Det } A_{k+1} \overset{\text{induzione}}{=} \text{Det } A_1 \cdots\cdots \text{Det } A_h \cdot \text{Det } A_{k+1}$$

D) $\underline{1^\circ \text{ caso}}$ $\quad \text{Det } A = 0$ $\quad$ voglio dimostrare che

$$\text{Det} \underline{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}} = 0 .$$

$\text{Det } A = 0$ vuol dire le colonne di A sono lin. dip.

quindi anche le colonne di $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ sono lin. dip.

quindi le colonne di $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ sono lin. dip.

$\underline{2^\circ \text{ caso}}$ $\quad \text{Det } A \neq 0 \quad$ A invertibile

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}B \\ 0 & D \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\alpha + Y\gamma & X\beta + Y\delta \\ Z\alpha + W\gamma & Z\beta + W\delta \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{Laplace.}}{\underset{\uparrow}{\text{Det } A .}} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{A} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = \text{Det } A .$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\, D.$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & \boxed{D} \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} 1 \cdot \mathrm{Det}\, D.$$

#

Esercizio

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi & \sqrt{2} & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \pi & \sqrt{\pi} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 5 \cdot 2 = -10.$$

Esercizio

$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad n \geq 1$

$$v_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} \qquad v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= M} v_n$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = M \cdot v_0 \quad \cdots\cdots \quad v_n = M^n \cdot v_0$$

cerchiamo dei vettori u_1 e u_2 con $M u_1 = \lambda_1 u_1$

$M u_2 = \lambda_2 u_2$

1° passo determiniamo gli autovalori di M

$$p_M(t) = \mathrm{Det}(M - tI) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= t^2 - t - 1$$

Trovo le soluzioni di $\boxed{t^2 - t - 1} = 0$

$\Delta = 5$ Le soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

cerco u_1 con $Mu_1 = \lambda_1 u_1$

$$(M - \lambda_1 I)\, u_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \quad - \text{II riga} \cdot \lambda_1 = \text{I}^a \text{ riga.}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_1^2 = 1.$$

il sistema è eq. a $\quad -\lambda_1 x + y = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

e similmente $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ risolve $Mu_2 = \lambda_2 u_2$

$$[L_M]_{u_1\, u_2}^{u_1\, u_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo calcolare M^{100} come abbiamo fatto per l'esercizio corretto sabato.

MATRICI E APPLICAZIONI LINEARI DIAGONALIZZ.

DEFINIZIONE

$F: V \longrightarrow V$ lineare

F si dice diagonalizzabile e esiste una base di V di autovettori di F. ovvero esiste una base $v_1 \dots v_n$ di V con $F v_i = \lambda_i \cdot v_i$.

DEFINIZIONE

una matrice M quadrata si dice diagonalizzabile se L_M è diagonalizzabile.

OSSERVAZIONE

1) $F: V \longrightarrow V$ lineare

F è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists\ v_1 \dots v_n$ base di V

$$[F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ esiste una base $v_1 \dots v_n$ con $F v_i = \lambda_i \cdot v_i$

quindi $$[F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F v_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$$

$\Leftarrow$ stesso ragionamento (ESR.)

2) M quadrata $n \times n$

M è diagonalizzabile $\iff \exists\, C$ $n \times n$ e invertibile

e $C \cdot M \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ M diagonalizzabile vuol dire $L_M : K^n \to K^n$ diagonalizzabile. quindi esiste una base di K^n $v_1 \dots v_n$ e

$$[L_M]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ricordiamo

$$[L_M]^{v_1 \quad v_n}_{v_1 \quad v_n} = \underbrace{[I]^e_v}_{= C} \; \underbrace{[L_M]^e_e}_{= M} \; \underbrace{[I]^v_e}_{= C^{-1}}$$

quindi abbiamo trovato C : $C M C^{-1}$ è diagonale.

3) Se $v_1 \dots v_n$ è una base qualsiasi di V e $M = [F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n}$

F è diagonalizzabile $\iff$ M è diagonalizz.

$\boxed{\Rightarrow}$ F diag. vuol dire esiste una base $u_1 \dots u_n$ tale che $[F]^{u_1 \dots u_n}_{u_1 \dots u_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$[F]^{u_1 \dots u_n}_{u_1 \dots u_n} = [I]^v_u \; [F]^v_v \; [I]^u_v$$

$$\quad\quad\quad\quad\; \| \quad\quad\; \| \quad\quad\; \|$$

$$\begin{array}{cccc} & C & M & C^{-1} \end{array}$$

$$C \cdot M \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ovvero M è diagon.ile

---

ESEMPI

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ è diagonalizzabile?

Calcoliamo autovalori e autovettori di M.

$$p_M(t) = \mathrm{Det}\left(M - tI\right) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$$

M ha un unico autovalore che è $\lambda = 1$.

Calcoliamo gli autovettori di autovalore 1.

ovvero i v che risolvono $M \cdot v = v$

ovvero $(M - I)\, v = 0$

$$M - I = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

in particolare e_1 è un autovettore

e se v è autovettore allora $v = xe_1$

non esiste una base di autovettori.

ESEMPIO

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$F = L_M \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F non ha autovalori e quindi non ha autovettori.

$$P_F(t) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2+1$$

Esempio $\quad G : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$G = L_M \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_G(t) = t^2+1 = (t+i)(t-i)$$

G ha autovalori $\lambda = i$ e $\lambda = -i$.

autovettori di autovalore $\lambda = i$. $\qquad M - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{che è eq. a} \quad x - iy = 0$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} +i \\ 1 \end{pmatrix}$$

e similmente per $\lambda = -i$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{ch} \quad x + iy = 0$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_1 e u_2 è una base di autovettori di $\mathbb{C}^2$

NOTA BENE La matrice era la stessa ma il campo diverso. Specificare ogni volta quale è il campo sul quale lavoriamo.

esempio: $V = \mathbb{C}$ $\quad$ V è uno sp. vettoriale su $\mathbb{C}$ di dim 1.

V è anche uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ di dim 2

V è anche uno sp. vettoriale su $\mathbb{Q}$ che non ha dim. finita.

DEFINIZIONE $\quad$ V sp. vett. sul campo K.

$F: V \longrightarrow V$ lineare

$\lambda \in K$ definisco autospazio relativo a λ

$$V_\lambda = V_\lambda(F) = \{ v \in V : \underline{Fv = \lambda v} \}$$

$$= N(F - \lambda \, Id)$$

è un sottospazio di V.

$$\dim V_\lambda = \text{molteplicità geometrica di } \lambda$$
$$= mg(\lambda) = mg_\lambda$$

OSSERVAZIONE

$$V_\lambda \neq 0 \iff mg(\lambda) \geq 1 \iff \lambda \text{ è un autovalore}$$