DETERMINANTI

Ricordiamo la formula di Laplace: Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$ e fisso la riga i-esima abbiamo

$$\operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A togliendo la riga i-esima e la colonna j-esima.

CALCOLO DELL' INVERSA

Sia $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ e poniamo $B = (\alpha_{ij})$

il libro chiama la matrice B la matrice dei cofattori

<u>esempio $n=2$</u> Calcoliamo B nel caso $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22} \qquad \alpha_{12} = (-1)^3 a_{12} = -a_{12}$$

$$\alpha_{21} = -a_{21} \qquad \alpha_{22} = a_{11}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>PROPOSIZIONE</u> Sia A $n \times n$ $A = (a_{ij})$ e B è la matrice (α_{ij}) costruita sopra

allora $A \cdot B = \det A \cdot I_n$

in particolare se $\det A \neq 0$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot B$.

<u>dim</u>

Devo dimostrare che

$$(1) \quad a_{i1}\, \underline{\alpha_{1i}} + a_{i2}\, \underline{\alpha_{2i}} + \cdots + a_{in}\, \alpha_{ni} = \det A$$

e

$$(2) \quad a_{i1}\, \alpha_{1j} + a_{i2}\, \alpha_{2j} + \cdots + a_{in}\, \alpha_{nj} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

L'espressione (1) si riscrive:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, (-1)^{i+j} \det A_{ij} \overset{\text{Laplace.}}{=} \det A$$

è quindi verificata per Laplace

L'espressione (2) si riscrive

$$0 = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, (-1)^{h+j} \det(A_{jh})$$

Dimostriamo questa uguaglianza usando ancora Laplace:
consideriamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j \\ \\ \end{array}$$

è la matrice ottenuta da A sostituendo alla riga j-esima la riga i-esima.

$\det C = 0$ perché ha due righe uguali, qu

Sviluppiamo ora il determinante di C rispetto alla riga j-esima:

$$0 = \det C \overset{\text{Laplace}}{=} \sum_{h=1}^{n} \underbrace{c_{jh}}_{= a_{ih}} (-1)^{j+h} \underbrace{\det(C_{jh})}_{= \det(A_{jh})}$$

$$a_{ih} \quad (-1)^{j+h} \quad \det(A_{jh})$$

da cui $0 = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} (-1)^{j+h} \det(A_{jh})$ come volevasi.

#

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare α_{23} tolgo la 2^a colonna e la 3^a riga

$$\operatorname{Det} A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

e similmente per calcolare α_{ij}

$\alpha_{11} = 0$ $\qquad$ $\alpha_{12} = -(-1) = 1$ $\qquad$ $\alpha_{13} = +(-3) = -3$

$\alpha_{21} = -0 = 0$ $\qquad$ $\alpha_{22} = +(-4) = -4$ $\qquad$ $\boxed{\alpha_{23} = 0}$

$\alpha_{31} = +(-12) = -12$ $\qquad$ $\alpha_{32} = -(-7)$ $\qquad$ $\alpha_{33} = +3$

FORMULA DI CRAMER $\quad$ Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ e $b \in K^n$

Consideriamo il sistema

$$Ax = b \qquad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se $\operatorname{Det} A \neq 0$ noi sappiamo che il sistema ha un'unica soluzione che è $x = A^{-1} b$.

Ragionando similmente a sopra possiamo ricavare

$$x_i = \frac{1}{\text{Det } A} \text{Det}\left(A^1 \dots \underset{\uparrow}{A^{i-1}}\ b\ A^{i+1} \dots A^n\right)$$

colonne

FORMULA DI BINET

Siano A e B due matrici $n \times n$ allora

$$\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B) \quad (\ast)$$

dim

1° CASO B non è invertibile cioè $\det B = 0$

ovvero $\exists\ x \neq 0$ e $Bx = 0$

quindi $ABx = 0$ quindi $A \cdot B$ non è invertibile.

quindi $\det(AB) = 0$ e la formula si riduce a $0 = 0$

2° CASO B invertibile ovvero $\text{Det } B \neq 0$ $(\ast)$ è eq.

a:

$$\text{Det } A = \text{Det}(AB) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$$

consideriamo le due funzioni

$$f(A) = \text{Det}(A)$$

$$g(A) = \text{Det}(AB) \frac{1}{\text{Det } B}$$

Se faccio vedere che f e g hanno le proprietà

I) $f(I) = g(I) = 1$

II) le proprietà 1 e 2 di prima

III) Se due righe sono uguali allora $f = g = 0$

Come abbiamo visto queste proprietà determinano il calcolo del determinante quando effettuiamo la riduzione a scalini. Quindi se f e g hanno queste proprietà allora si calcolano allo stesso modo e quindi sono uguali. f è il det. quindi verifica I, II, III.

Vediamo g:

I) $$g(I_n) = \det(I_n \cdot B)\frac{1}{\det B} = \frac{\det B}{\det B} = 1$$

II) Se $$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \lambda A_i \\ A_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$g(A') = \operatorname{Det}(\underline{A' \cdot B})\frac{1}{\operatorname{Det} B}$$

$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A_1 \cdot B \\ A_2 \cdot B \\ \lambda A_i \cdot B \\ \\ A_n \cdot B \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det B}$$

$$= \lambda \operatorname{Det}(A \cdot B) \cdot \frac{1}{\det B} = \lambda g(A)$$

e analogamente se una riga è somma di due righe

III) Infine se A ha la riga i e la riga j uguali allora $A \cdot B$ ha la riga i e la riga j uguali e quindi

$$g(A) = \underline{\mathrm{Det}(A \cdot B)} \cdot \frac{1}{\mathrm{Det}\, B} = 0$$

#

<u>Corollario</u> Se A è invertibile allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

<u>dim</u>

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \quad \text{e per Binet}$$

$$1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

divido per $\det(A)$ e ottengo la formula della tesi

#

<u>DEFINIZIONE</u> Sia V uno sp. vett. di dim. n.

$F : V \longrightarrow V$ lineare e sia $v_1 \dots v_n$ una base di V

Definisco

$$\mathrm{Det}(F) = \mathrm{Det}\left([F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n} \right)$$

La definizione è ben data perché la formula di destra non dipende dalla base $v_1 \dots v_n$ di V.

Infatti se $w_1 \dots w_n$ è un'altra base e pongo

$$A = [F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n} \qquad B = [F]_{w_1 \dots w_n}^{w_1 \dots w_n}$$

ricordo che $\quad B = [I]_w^v \; [F]_v^v \; [I]_v^w$

Sia $C = [\,I\,]_{w}^{v}$ e quindi $[\,I\,]_{v}^{w} = C^{-1}$

quindi $B = C\,A\,C^{-1}$.

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det}\left(C \cdot A \cdot C^{-1}\right) \overset{\text{Binet}}{=} \cancel{\operatorname{Det}(C)} \cdot \operatorname{Det}(A) \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{Det} C}} =$$

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} A.$$

CORREZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 61

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = [L_M]_{e_1 e_2}^{e_1 e_2}$$

Calcolare $M^{100} = M \cdot M \cdot \ \dots \ \cdot M$ 100 volte

(1°) PASSO $\exists$ una base v_1 v_2 tale che

$$N = [L_M]_{v_1 v_2}^{v_1 v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ quindi}$$

$$N^{100} = \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo v_1 e v_2 $\qquad L_M v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = v_1$

$$L_M v_2 = 3 v_2$$

- $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad L_M v_1 = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x + 2y = x \\ -4x + 5y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2y \\ 4x = 4y \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad x = y.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad L_M v_2 = 3 v_2$

$$\begin{cases} -x + 2y = 3x \\ -4x + 5y = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x = 2y \\ 4x = 2y \end{cases}$$

$$y = 2x$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[L_M]^{v_1\, v_2}_{v_1\, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2° PASSO: Calcoliamo M^{100} usando un cambio di base:

$$M = [L_M]^{e_1\, e_2}_{e_1\, e_2} = \underbrace{[I]^{v}_{e}}_{C} \; \underbrace{[L_M]^{v}_{v}}_{N} \; \underbrace{[I]^{e}_{v}}_{C^{-1}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = C\, N\, C^{-1}$$ quindi:

$$M^{100} = \underline{C} \cdot N \cdot \cancel{C^{-1}} \cdot \cancel{C} \cdot N \cdot \cancel{C^{-1}} \cdot \cancel{C} \cdot N \cdot C^{-1} \cdots\cdots \cdot C \cdot N \cdot \underline{C^{-1}}$$

$$= C\, N^{100}\, C^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^{100} \\ 1 & 2 \cdot 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3^{100} & -1 + 3^{100} \\ 2 - 2 \cdot 3^{100} & -1 + 2 \cdot 3^{100} \end{pmatrix}$$

Esempio La succ. di Fibonacci:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$v_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ per $n \geq 1$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots$

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= M} v_n$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = M v_1 \qquad v_{101} = M^{100} v_1$

Se per $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ posso fare un trucchetto simile a quello dell'esercizio precedente posso calcolare l'ennesimo numero di Fibonacci.