GUIDA ALLO STUDIO DI ALG. LINEARE

IN QUESTI APPUNTI TROVATE QUALCHE INDICAZIONE MOLTO GENERALE PER LA PREPARAZIONE DELLA PRIMA PARTE DEL CORSO DI GEOM. E ALG. LINEARE.

HO DIVISO QUESTE INDICAZIONI NELLE 5 VOCI SEGUENTI:

- NUMERI COMPLESSI
- K^n E MATRICI
- SPAZI VETTORIALI, BASI, DIMENSIONE
- APPLICAZIONI LINEARI
- AUTOVALORI E AUTOVETTORI

PER OGNI VOCE TROVATE QUALCHE INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA E QUALCHE PRECISAZIONE SULLE NOTAZIONI USATE NEL CORSO CHE POSSONO ESSERE DIVERSE DA QUELLE CHE TROVATE NEI LIBRI DI TESTO.

NUMERI COMPLESSI

PER QUELLO CHE ABBIAMO FATTO SUI NUMERI COMPLESSI POTETE FARE RIFERIMENTO A

- CAP. 2.9 DEL LIBRO DI ANALISI
- TUTTI GLI ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI DEL FOGLIO DEGLI ESERCIZI.
- GLI APPUNTI "NUMERI COMPLESSI E GEOMETRIA" SPIEGANO COME USARE I NUMERI COMPLESSI NELLA SOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI DI GEOM. PIANA E CONTENGONO LA SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO SUL BIRAPPORTO CHE È PIÙ DIFFICILE DEGLI ALTRI
- GLI APPUNTI "NUMERI COMPLESSI E POLINOMI" SONO MOLTO IMPORTANTI

  IN TUTTO LO STUDIO DEGLI AUTOVALORI.

K^n E MATRICI

ARGOMENTI:

A • DEFINIZIONE DI SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE

B • PRODOTTO TRA MATRICI

C • MATRICE IDENTITÀ nxn I_n

D • MATRICI QUADRATE INVERTIBILI

E • TRASPOSTA DI UNA MATRICE, TRACCIA DI UNA MATRICE MATRICI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE.

F • SISTEMI LINEARI E MATRICI: MATRICE ASSOCIATA AD UN SISTEMA LINEARE E MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AD UN SISTEMA LINEARE

G • MATRICI A SCALINI E MATRICI A SCALINI IN FORMA FORTE, RANGO DI UNA MATRICE A SCALINI

M • RIDUZIONE DI UNA MATRICE A SCALINI, TRASFORMAZIONI ELEMENTARI : R_{ij}, $R_i(\alpha)$, $R_{ij}(\alpha)$, RANGO DI UNA MATRICE

I • ROUCHÉ - CAPELLI

GLI ARGOMENTI DA A A H LI TROVATE NELLE SEZIONI 1.2 E 1.3 DEL LIBRO. IL PUNTO I LO TROVATE NELLA SEZIONE 1.5 CHE PERÒ È UN PO' DIVERSA DA COME LO ABBIAMO TRATTATO IN CLASSE. QUESTO TEOREMA E QUALCHE ALTRA OSS SUI SISTEMI LINEARI LI TROVATE ANCHE NEGLI APPUNTI "SISTEMI LINEARI E MATRICI"

NOTAZIONI

- LE COLONNE DI UNA MATRICE IL LIBRO LE INDICA CON $A_{(j)}$ E LE RIGHE CON $A^{(i)}$, A LEZIONE HO FATTO SPESSO IL VICEVERSA.
- LE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI R_{ij} $R_i(\alpha)$ $R_{ij}(\alpha)$ IL LIBRO LE INDICA CON LA LETTERA MINUSCOLA. E A LEZIONE SI SONO INDICATI A VOLTE CON M INVECE CHE CON R

SPAZI VETTORIALE, BASI, DIMENSIONE

ARGOMENTI:

- DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE
- ESEMPI : K^n, MATRICI, VETTORI GEOMETRICI $\overrightarrow{AB}$, FUNZIONI
- SOTTOSPAZI, INTERSEZIONE E SOMMA
- GENERATORI, VETT. LIN. INDIP, BASI
- DIMENSIONE
- FORMULA DI GRASSMANN
- SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

TUTTI QUESTI ARGOMENTI LI TROVATE NELLE SEZIONI 1.1 E 1.4 DEL LIBRO.

A LEZIONE ABBIAMO INTRODOTTO LA SEGUENTE NOTAZIONE

DI CUI ABBIAMO FATTO USO SISTEMATICO IN TUTTO IL PRIMO SEMESTRE.

Sia $v_1 \dots v_n$ UNA BASE DI V E SIA $v \in V$.
QUINDI ESISTONO $a_1 \dots a_n \in K$ UNIVOCAMENTE DETERMINATI TALI CHE

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

I COEFFICIENTI $a_1 \dots a_n$ SONO DETTE LE COORDINATE DI v RISPETTO ALLA BASE $v_1 \dots v_n$ E PONIAMO

$$[v]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

APPLICAZIONI LINEARI

ARGOMENTI:

A • DEFINIZIONE

B • Nucleo e Immagine

C • UNA APPLICAZIONE È DETERMINATA UNIVOCAMENTE DAI VALORI CHE ASSUME SU UNA BASE

D • FORMULA DELLA DIMENSIONE

E • APPLICAZIONI LINEARI DA K^n A K^m

F • MATRICI ASSOCIATE AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

G • $[F]^{\underline{u}}_{\underline{v}} \, [x]_{\underline{u}} = [F(x)]_{\underline{v}}$

$[F \circ G]^{\underline{u}}_{\underline{w}} = [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [G]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$

H • $\mathrm{Hom}(V, W)$

I • ISOMORFISMI DI SPAZI VETTORIALI

L • CAMBIAMENTI DI BASE

M • SPAZIO DUALE: BASE DUALE, ANNULLATORE

N • PARAMETRIZZAZIONE E DESCRIZIONE CARTESIANA DI UN SOTTOSPAZIO

O • DETERMINANTI: DEFINIZIONE CON LE PERMUTAZIONI

P • PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL DETERMINANTE

Q • FORMULA DI BINET, FORMULA DI CRAMER, SVILUPPO DI LAPLACE

QUESTI ARGOMENTI CORRISPONDONO ALLE SEZIONI 1.6 (SENZA DIM. DEL TEOREMA 6.2) 1.11 (SENZA LA PARTE SUL QUOZIENTE PAR. 7, IL COROLLARIO 11.7, IL TEOREMA 11.9 E I COMPLEMENTI) E 1.12.

SULLA PAGINA WEB TROVATE INOLTRE

- APPUNTI SULLO SP. DUALE
- NOTE DELLA LEZIONE SU PARAMETRIZZ. E DESCRIZIONE CARTESIANA DI UN SOTTOSPAZIO
- NOTE DI ALCUNE LEZIONI SUI DETERMINANTI (PURTROPPO MANCA LA LEZIONE CENTRALE CREDO IN AULA B 3.1).

NOTAZIONI

- Se $F: V \longrightarrow W$ È LINEARE E $v_1 \dots v_n$ È UNA BASE DI V E $w_1 \dots w_m$ UNA BASE DI W NOI ABBIAMO INDICATO LA MATRICE ASSOCIATA F RISPETTO A QUESTE BASI CON

$$[F]_{w_1 \dots w_m}^{v_1 \dots v_n}$$

MENTRE IL LIBRO LA INDICA CON $M_{w,v}(F)$

- Se A È UNA MATRICE $m \times n$ NOI ABBIAMO INDICATO L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA CON

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$

- IL NUCLEO LO ABBIAMO INDICATO CON $N(F)$, COME IL LIBRO, MA MOLTI LO INDICANO CON $\ker(F)$

- IL DUALE LO ABBIAMO INDICATO CON V^* MENTRE IL LIBRO CON $V^\vee$. L'ANNULATORE $\mathrm{Ann}\,W$ LO INDICA CON $W^\perp$ E LO CHIAMA ORTOGONALE

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

ARGOMENTI

- DEFINIZIONE DI AUTOVALORE E AUTOVETTORE
- POLINOMIO CARATTERISTICO
- APPLICAZIONI DIAGONALIZZABILI E MATRICI DIAGONALIZZABILI
- AUTOSPAZI E MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE
- SE V È UNO SP. VETT. SU CAMPO K DI DIM. FINITA E $F: V \longrightarrow V$ DIAGONALIZZABILE ALLORA
  1) TUTTE LE RADICI DI p_F SONO IN K
  2) $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \quad \forall \lambda$.
- ESEMPI DI APP. E MATRICI DIAG. E NON.

PER LA DEFINIZIONE DI AUTOVALORE E AUTOVETTORE E POLINOMIO CARATTERISTICO DEFINIZIONE 13.4 13.10, PROPOSIZIONE 13.9 E COR. 13.11. E APPUNTI DELLE LEZIONI IN RETE.

TUTTA QUESTA PARTE VERRÀ RIPRESA E AMPLIATA NEL SECONDO SEMESTRE.

IN DEFINITIVA IL PROGRAMMA SVOLTO NEL PRIMO SEMESTRE

È CONTENUTO IN:

- LIBRO DI ANALISI: LA PARTE SUI NUMERI COMPLESSI
- IL LIBRO GEOMETRIA 1 DI SERNESI, LE SEZIONI:
  1.1
  1.2
  1.3
  1.4
  1.6 (SENZA LA DIMOST. DEL TEOR. 6.2)
  1.11 (SENZA LA PARTE SULLO SPAZIO QUOZIENTE PAR. 6 IL COROLLARIO 11.7 E IL TEOREMA 11.5 E SENZA I COMPLEMENTI)
  1.12
- GLI APPUNTI CHE TROVATE SULLA PAGINA WEB
  - NUMERI COMPLESSI E POLINOMI
  - NUMERI COMPLESSI E GEOMETRIA
  - SISTEMI LINEARI E MATRICI
  - PARAMETRIZZAZIONE E DESCRIZIONE CARTESIANA DI SOTTOSPAZI
  - SPAZIO DUALE
  - DETERMINANTI
  - DIAGONALIZZABILITÀ 1 e 2

SE AVETE DEGLI APPUNTI DISCRETI, LA COSA MIGLIORE PER PREPARARE IL CORSO CREDO SIA SISTEMARE GLI APPUNTI.

IN OGNI CASO IL LIBRO SECONDO ME È FATTO MOLTO BENE E IN GRAN PARTE HA UNO STILE E UNA IMPOSTAZIONE MOLTO SIMILE A QUELLA DEL CORSO. PER LE PARTI NELLE QUALI CI SIAMO DISCOSTATI DI PIÙ HO AGGIUNTO DEGLI APPUNTI SULLA PAGINA WEB.

L'ORDINE DEGLI ARGOMENTI DEL CORSO HA SEGUITO DELLE ESIGENZE DIDATTICHE. NON SEMPRE QUESTO ORDINE CORRISPONDE AL MODO PIÙ CONVENIENTE DI ORGANIZZARE LE COSE DAL PUNTO DI VISTA LOGICO. PER ESEMPIO NOI ABBIAMO PRIMA PARLATO DI MATRICI E SOLO MOLTO DOPO DI APPLICAZIONI LINEARI CHE SONO UN ARGOMENTO PIÙ ASTRATTO. TUTTAVIA ALCUNE OSSERVAZIONI CHE ABBIAMO FATTO PER LE APPLICAZIONI LINEARI SONO UTILI NELLO STUDIO DELLE MATRICI.

TUTTO CIÒ CHE ABBIAMO FATTO FA PARTE DEL PROGRAMMA. NON TUTTE LE COSE PERÒ HANNO LA STESSA IMPORTANZA E UTILITÀ. LE SEGUENTI SONO SICURAMENTE MOLTO IMPORTANTI:

- CAPIRE BENE LE DEFINIZIONI: SAPER FORMULARE UNA DEFINIZIONE SENZA ERRORI E CON IL LINGUAGGIO APPROPRIATO, SAPER FARE DEGLI ESEMPI SIGNIFICATIVI

- PRIMA ANCORA DI SAPERE LE DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI PIÙ COMPLICATI È IMPORTANTE SAPER DIMOSTRARE AFFERMAZIONI SEMPLICI COME QUELLE CHE A VOLTE ABBIAMO LASCIATO PER ESERCIZIO. (PER CAPIRSI IL LIVELLO DI DIFFICOLTÀ CHE HO IN MENTE È $N(F) = 0$ IMPLICA F INIETTIVA, E IN GENERALE QUELLE DI DIMOSTRAZIONI IN CUI BASTA METTERE PER ESTESO IL SIGNIFICATO DELLE DEFINIZIONI)

- ACQUISIRE UNA BUONA MANUALITÀ NEL CALCOLO CON LE MATRICI: MOLTIPLICAZIONE, RIDUZIONE A SCALINI, CALCOLO DEL DETERMINANTE

- AVER CAPITO BENE L'ENUNCIATO DEI TEOREMI PIÙ IMPORTANTI: SAPER ESPRIMERE L'ENUNCIATO CON PRECISIONE, SAPER FARE DEGLI ESEMPI IN CUI SI APPLICA IL TEOREMA, SAPER COMMENTARE LE IPOTESI (COSA SUCCEDE SE UNA IPOTESI VIENE MENO)

- SAPER PASSARE DAL LINGUAGGIO ASTRATTO AD UNO PIÙ CONCRETO E VICEVERSA. PER ESEMPIO DAL LINGUAGGIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI A QUELLO DELLE MATRICI.