SPAZIO DUALE

DEFINIZIONE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K.
LO SPAZIO DUALE È $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$
OVVERO

$$V^* = \{ \varphi : V \longrightarrow K \,,\ \varphi \text{ lineare} \}$$

Esempio

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x - 7y + \pi z$$

È UN ELEMENTO DI V^*

ESEMPIO

$V = K^n$ TUTTI GLI ELEMENTI DI V^*
SI SCRIVONO NELLA FORMA

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

con $a_1, \dots, a_n \in K$.

OSSERVAZIONE

RICORDIAMO V^* è UNO SP. VETTORIALE CON $0, +, \cdot$
DEFINITI NEL MODO SEGUENTE

1) $0(v) = 0_K \quad \forall v$
2) $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$

3) $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\,\varphi(v)$

OSSERVAZIONE

Se $V = K^n$ allora ha una base canonica $e_1 \dots e_n$. Anche V^* ha una base canonica definita da

$$\varphi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i$$

OSSERVIAMO CHE

$$\varphi_i(e_i) = 1 \qquad \varphi_i(e_j) = 0 \text{ per } i \neq j$$

OSSERVIAMO anche che $\varphi_1 \dots \varphi_n$ è base di V^* infatti se

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \text{allora}$$

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$$

DEFINIZIONE – PROPOSIZIONE

Sia $v_1 \dots v_n$ una base di V

Sia $\varphi_i \in V^*$ DEFINITA DA

$$\varphi_i(v_j) = 0 \quad i \neq j \qquad \varphi_i(v_i) = 1$$

Allora $\varphi_1 \dots \varphi_n$ è una base di V^*

DETTA BASE DUALE

dim

1° $\varphi_1 \dots \varphi_n$ sono lin. indip.

Sia

$$a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = 0$$

allora

$$(a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)(e_i) = 0$$

ma $(a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)(e_i) =$

$= a_1\,\varphi_1(e_i) + \dots + a_n\,\varphi_n(e_i) =$

$= a_i$

quindi $a_i = 0 \quad \forall i.$

2° Sia $\varphi \in V^*$ e sia $\varphi(e_i) = a_i$

allora

$$\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n \, .$$

infatti $\varphi(e_i) = (a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)(e_i) = a_i$.

e una app. lineare è univoc. determinata dai valori che assume su una base

#

ANNULLATORE

DEFINIZIONE

Sia X un sottospazio di V

Y un sottospazio di V^*

DEFINISCO

$$\mathrm{Ann}\, X = \{ \varphi \in V^* : \varphi(v) = 0 \ \forall v \in X \}$$

$$\mathrm{Ann}\, Y = \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \ \forall \varphi \in Y \}$$

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$

$X = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$

$$\mathrm{Ann}\, X = \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(e_1 + e_2) = 0 \}$$

ovvero se $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$

è come chiedere $a + b = 0$

quindi $\mathrm{Ann}\, X = \{ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax - ay + cz$ con $a, c \in \mathbb{R} \}$.

$$= \langle \varphi_1 - \varphi_2 , \varphi_3 \rangle$$

$Y = \mathbb{R}(\varphi_1 + \varphi_3)$

$$\mathrm{Ann}\, X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \varphi_1 + \varphi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + z = 0 \right\}$$
$$= \langle e_1 - e_3 , e_2 \rangle .$$

LEMMA $\dim V = n$

1) $\mathrm{Ann}\ X$ È UN SOTTOSPAZIO DI V^*

2) $\mathrm{Ann}\ Y$ È UN SOTTOSPAZIO DI V

3) $\dim \mathrm{Ann}\ X = n - \dim X$

4) $\dim \mathrm{Ann}\ Y = n - \dim Y$

5) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\ X) = X$

6) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\ Y) = Y$

dim

DIMOSTRO 1, 3, 5 LA DIM DI 2, 4, 6 È ANALOGA

1) • $0 \in \mathrm{Ann}\ X$

• $\varphi, \psi \in \mathrm{Ann}\ X$

$$\varphi + \psi\ (v) = \varphi(v) + \psi(v) = 0 + 0 = 0$$

• $\varphi \in \mathrm{Ann}\ X \quad \lambda \in K$ per $v \in X$

$$(\lambda \varphi)(v) = \lambda \varphi(v) = 0 \quad \text{per } v \in X$$

3) Sia $v_1 \dots v_d$ una base di X e $v_1 \dots v_n$ una base di V.

Sia $\varphi_1 \dots \varphi_n$ la base duale. Osserva che

$$a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n\ (v) = 0 \quad \forall v \in X$$

se e solo se

$$a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n (v_i) = 0 \quad \text{per } i = 1 \dots d$$

ovvero

$$a_i = 0 \quad \text{per } i = 1 \dots d$$

ovvero

$$\varphi = a_{d+1} \varphi_{d+1} + \dots + a_n \varphi_n$$

Quindi $\quad \mathrm{Ann}\, X = \langle \varphi_{d+1}, \dots, \varphi_n \rangle$

e $\dim \mathrm{Ann}\, X = n - d$.

5) Osservo che $\dim \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(X)) = \dim X$ per via dei punti 2 e 4.

quindi basta dimostrare che $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(X)) \supset X$

Sia $v \in X$ e se $\varphi \in \mathrm{Ann}\, X$ allora

$\varphi(v) = 0$ quindi $v \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(X))$

#

QUESTI CONCETTI LI ABBIAMO RIPRESI QUANDO ABBIAMO PARLATO DI DESCRIZIONE CARTESIANA DI UN SOTTOSPAZIO.