NUMERI COMPESSI E POLINOMI

1 DIVISIONE TRA POLINOMI

INIZIAMO CON UNA OSSERVAZIONE SEMPLICE MA MOLTO UTILE QUANDO SI USANO I POLINOMI:

Se f È UN POLINOMIO DI GRADO n E g È UN POLINOMIO DI GRADO m ALLORA $f \cdot g$ HA GRADO $n+m$.

QUALCHE ATTENZIONE VA FATTA NEL CASO IN CUI UNO DEI POLINOMI SIA IL POLINOMIO NULLO. SE ATTRIBUISSIMO grado $= 0$ A TALE POLINOMIO QUESTA OSSERVAZIONE SAREBBE FALSA. UNA SOLUZIONE CHE FUNZIONA IN MOLTI CASI È ATTRIBUIRE grado $= -\infty$ AL POLINOMIO NULLO.

LA DIVISIONE TRA POLINOMI È MOLTO SIMILE ALLA DIVISIONE CON RESTO TRA NUMERI NATURALI:

DATI f e g POLINOMI CON $g \neq 0$ SI VUOLE DETERMINARE q e r TALI CHE

1) $f = qg + r$

2) $\text{grado}(r) < \text{grado}(g)$

IL POLINOMIO r SI DICE IL RESTO DELLA DIVISIONE.

I POLINOMI q e r ESISTONO SEMPRE, SONO UNICI E SI POSSONO CALCOLARE CON LO STESSO PROCEDIMENTO CHE SI USA PER I NUMERI INTERI (ANZI UN PÒ PIÙ SEMPLICE). r SI DICE IL RESTO

NE RICORDO I PASSI FONDAMENTALI E LO ILLUSTRO CON UN ESEMPIO.

1° PASSO Se $\text{grado}(f) < \text{grado}(g)$

ALLORA $q = 0$ e $r = f$

2° PASSO Se $\text{grado}(f) \geq \text{grado}(g)$

Sia $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\quad a_n \neq 0$

e se $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \qquad b_m \neq 0$

allora il primo termine di q sarà $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$

e poi sottraggo a f IL POLINOMIO $\frac{a_n}{b_m} \cdot g \cdot x^{n-m}$

E PROSEGUO IN QUESTO MODO

ESEMPIO

$$f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g = 2x^3 + x + 1$$

$$\begin{array}{rl|l}
f = & 1 \cdot x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & 2x^3 + x + 1 = g \\
\hline
& x^5 \qquad + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = q \\
\hline
& 3x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \\
& 3x^4 \qquad + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x & \\
\hline
& \frac{5}{2}x^3 - x^2 - x + 1 & \\
& \frac{5}{2}x^3 \qquad + \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} & \\
\hline
r = & -x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} &
\end{array}$$

A SINISTRA COLORATO C'È a_n E A DESTRA $\frac{a_n}{b_m}$

② REGOLA DI RUFFINI

DEFINIZIONE Se K è un campo indico con $K[x]$ l'insieme dei polinomi a coeff in K nella variabile x.

DEFINIZIONE Se $f(x), g(x) \in K[x]$ dico che f divide g se $\exists\, h(x) \in K[x]$ tale che $f(x) = g(x)\, h(x)$. Se $g \neq 0$ questo è equivalente a richiedere che il resto della divisione di f per g è uguale a 0.

DEFINIZIONE Se $f(x) \in K[x]$, un numero $\alpha \in K$, si dice una RADICE di $f(x)$ se e solo se $f(\alpha) = 0$.

REGOLA DI RUFFINI Sia $f(x) \in K[x]$ e sia $\alpha \in K$.

α è una radice di f se e solo se $(x-\alpha)$ divide $f(x)$.

dim

Effettuiamo la divisione di f per $(x-\alpha)$ otteniamo

$$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + \rho(x)$$

con $\rho(x)$ un polinomio di grado minore del grado di $x-\alpha$ che è 1. Quindi $\rho(x)$ è una costante $C \in K$.

$$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + C$$

QUINDI

$$f(\alpha) = (\alpha-\alpha)\, q(\alpha) + C = C$$

QUINDI $f(\alpha)=0$ SE E SOLO $C=0$

OVVERO SE E SOLO SE IL RESTO DELLA DIVISIONE È ZERO OVVERO $x-\alpha$ DIVIDE f.

#

③ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI UNA RADICE

SE $f(x) \in K[x]$ E $f\neq 0$ E $\alpha \in K$ È UNA RADICE DI f PER LA REGOLA DI RUFFINI ABBIAMO

$$f(x) = (x-\alpha)\, f_2(x) \qquad \text{con } f_2 \neq 0$$

SE α È UNA RADICE ANCHE DEL POLINOMIO $f_2(x)$ AVREMO

$$f_2(x) = (x-\alpha)\, f_3(x)$$

E COSÌ VIA FINCHÉ NON ARRIVIAMO AD UN POLINOMIO $f_{k+1}(x)$ DI CUI α NON È RADICE.

DEFINIZIONE k SI DICE LA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE α NEL POLINOMIO $f(x)$

$$k = m.e_\alpha(f)$$

SE α NON È UNA RADICE DI f DICIAMO CHE LA MOLTEP. DI α È ZERO

EQUIVALENTEMENTE k È IL MASSIMO NUMERO NATURALE TALE CHE $(x-\alpha)^k$ DIVIDE $f(x)$.
QUINDI SE $k = m_{e_\alpha}(f)$ AVREMO

$$f(x) = (x-\alpha)^k\, \tilde{f}(x)$$

E α NON È UNA RADICE DI $\tilde{f}(x)$

LA MOLT. ALG. DI UNA RADICE GODE DELLA SEGUENTE PROPRIETÀ.

PROPRIETÀ DELLA MOLT. ALG. $f, g \in K[x]$ NON NULLI

$$m_{e_\alpha}(fg) = m_{e_\alpha}(f) + m_{e_\alpha}(g)$$

dim

Sia $k = m_{e_\alpha}(f)$ e $h = m_{e_\alpha}(g)$

OVVERO

$$f(x) = (x-\alpha)^k \tilde{f}(x)$$

$$g(x) = (x-\alpha)^h \tilde{g}(x)$$

CON $\tilde{f}(\alpha), \tilde{g}(\alpha) \neq 0$.

ALLORA

$$fg(x) = (x-\alpha)^{h+k} \tilde{f}\tilde{g}(x)$$

e $\tilde{f}\tilde{g}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) \neq 0$ E QUINDI PER IL CRITERIO DI RUFFINI $(x-\alpha)$ NON DIVIDE $\tilde{f}\tilde{g}$ E

$$h+k = m_{e_\alpha}(fg)$$

#

4 TERMINI LINEARI DI UN POLINOMIO

EFFETTUANDO IL PROCEDIMENTO DESCRITTO SOPRA PER TUTTE LE RADICI DI UN POLINOMIO NON NULLO f OTTENIAMO

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} h(x) \quad (*)$$

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K$ LE RADICI DI f.

$k_i = m_{e_{\alpha_i}}(f)$ E h UN POLINOMIO CHE NON HA RADICI $\alpha \in K$.

Esempio 1

Sia $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

$f(1) = 0$ quindi 1 è una radice

voglio calcolare $ma_1(f)$.

Poiché 1 è una radice $(x-1)$ divide f.

Effettuiamo la divisione

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - x + 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\
\cline{1-1}
\quad -x + 1 & \\
\quad -x + 1 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

quindi $f(x) = (x-1)\ (x^2-1) = (x-1)\, f_2(x)$

osserviamo che 1 è radice di $f_2(x)$, infatti $f_2(1) = 0$

quindi anche $f_2(x)$ si divide per $(x-1)$ e infatti

$$f_2(x) = x^2 - 1 = (x-1)\ (x+1) = (x-1)\ f_3(x)$$

Ora osserviamo che $f_3(1) = 2$ e quindi 1 non è una radice di f_3. Quindi $ma_1(f) = 2$.

Equivalentemente

$$f(x) = (x-1)\ f_2(x) = (x-1)^2\ f_3(x)$$

con $f_3(1) \neq 0$

Esempio 2

Sia $f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x^4+2x^2+1)$

vogliamo calcolare molteplicità algebriche delle radici di f e quindi scrivere $f(x)$ come nella formula (*) sopra. Questo dipende dal campo K.

1° CASO : $K = \mathbb{R}$. In questo caso non c'è più nulla da fare infatti il polinomio $h(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ non ha radici $\alpha \in \mathbb{R}$, poiché per $\alpha \in \mathbb{R}$ $h(\alpha) \geq 1$. Quindi f è già scritto nella forma cercata:

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 \, h(x)$$

f ha radici reali $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ e

$$m_{e_1}(f) = 3 \qquad m_{e_2}(f) = 5$$

2° CASO : $K = \mathbb{C}$. In questo caso il polinomio $h(x)$ ha radici.

$$h(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 = ((x+i)(x-i))^2$$
$$= (x+i)^2 (x-i)^2$$

Quindi

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x+i)^2 (x-i)^2$$

quindi le radici complesse sono

$$\alpha = 1 \qquad \alpha = 2 \qquad \alpha = i \qquad \alpha = -i$$

$$ma_1(f) = 3 \qquad ma_2(f) = 5 \qquad ma_i(f) = 2 \qquad ma_{-i}(f) = 2$$

<u>Esempio</u> 3 Sia $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$

vogliamo calcolare le radici di f, le molteplicità algebriche di f. Osservo

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1)$$
$$= (x-1)(x^2-1)(x^2+1)$$
$$= (x-1)(x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$$
$$= (x-1)^2(x+1)(x+i)(x-i)$$

Se $K = \mathbb{R}$ le radici sono $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$

$$ma_1 = 2 \qquad ma_{-1} = 1$$

Se $K = \mathbb{C}$ le radici sono $\alpha = 1, -1, i, -i$ con molt. alg. 2, 1, 1, 1.

<u>OSSERVAZIONE</u> Se uno calcola le molteplicità algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{C}$ ha calcolato anche tutte le molt. algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{R}$

(5) TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

<u>TEOREMA</u> SIA $f(x)$ UN POLINOMIO IN $\mathbb{C}[x]$. NON COSTANTE, OVVERO GRADO $(f) \geq 1$, ALLORA ESISTE $\alpha \in \mathbb{C}$ E $f(\alpha) = 0$.

QUESTO TEOREMA È DETTO TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA E NON LO DIMOSTREREMO. PER QUANTO DISCUSSO SOPRA SI PUÒ RIFORMULARE IL TEOREMA NEL MODO SEGUENTE

TEOREMA Sia $f(x)$ un polinomio in $\mathbb{C}[x]$ non nullo. Allora

$$f(x) = C \cdot (x-\alpha_1)^{h_1} \cdots (x-\alpha_s)^{h_s}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ distinti e $h_i = m_{\alpha_i}(f)$.

e C una costante.

(6) RADICI DI POLINOMI DI GRADO 2.

NEL CASO DEI POLINOMI DI GRADO DUE

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALG. È SEMPLICE DA VERIFICARE. INFATTI LA FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

SE E SOLO SE $\alpha = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

VALE SU OGNI CAMPO, MA MENTRE NEL CASO REALE PER ASSICURARE L'ESISTENZA DI $\sqrt{a^2-4b}$ DOBBIAMO ASSUMERE $a^2-4b \geq 0$ NEL CASO COMPLESSO LA RADICE QUADRATA ESISTE SEMPRE. SIA $w = u + iv$ UN NUMERO COMPLESSO CON $u, v \in \mathbb{R}$ E CERCHIAMO $z = x+iy$ CON $x, y \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$z^2 = w$$

OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2-y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

SE $v=0$ e $u \geq 0$ OTTENIAMO

$$x = \pm\sqrt{u} \quad e \quad y=0$$

SE $v=0$ e $u \leq 0$ OTTENIAMO

$$x=0 \quad e \quad y = \pm\sqrt{-u}$$

SE $v \neq 0$ ALLORA RICAVO $x, y \neq 0$ E

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{2y} \\ \dfrac{v^2}{4y^2} - y^2 = u \end{cases}$$

DA CUI $\quad y^4 + uy^2 - \dfrac{v^3}{4} = 0$

$$\Delta = u^2+v^2 \geq 0$$

$$y^2 = \frac{-u \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

POICHÉ $y \in \mathbb{R}$ $y^2 \geq 0$ E QUINDI

$$y^2 = \frac{-u + \sqrt{\Delta}}{2}$$

E $\quad y = \pm\sqrt{\dfrac{-u+\sqrt{\Delta}}{2}}$

E $\quad x = \dfrac{v}{2y}$ $\quad$ E ABBIAMO RICAVATO z.

7 POLINOMI A COEFF. REALI E RADICI CONIUGATE

IN ALCUNI ESERCIZI ABBIAMO UTILIZZATO LA SEGUENTE OSSERVAZIONE:

SIA $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ E SIA $\alpha \in \mathbb{C}$ TALE CHE $f(\alpha) = 0$.

ALLORA $f(\bar{\alpha}) = 0$.

INFATTI SIA $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

CON $a_i \in \mathbb{R}$ OVVERO $\overline{a_i} = a_i$. ALLORA

$$f(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + \cdots + a_0$$

E PER LE PROPRIETÀ DEL CONIUGIO

($\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ E $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$) OTTENIAMO

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= \overline{a_n}\ \overline{\alpha^n} + \cdots + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_0} \\ &= \overline{f(\alpha)} \\ &= 0 \end{aligned}$$