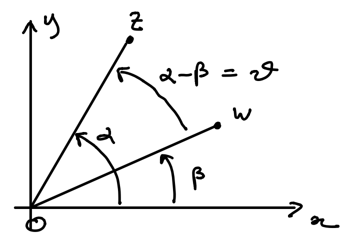
ALCUNE OSSERVAZIONI GEOMETRICHE SUI NUMERI COMPLESSI

ABBIAMO UTILIZZATO I NUMERI COMPLESSI PER DESCRIVERE ALCUNE QUANTITÀ GEOMETRICHE.

① ANGOLI, PRODOTTO SCALARE E AREA DI UN TRIANGOLO

SIANO $w, z \in \mathbb{C}$. CONSIDERIAMO IL PRODOTTO $z\overline{w}$.

SE $z = \rho e^{i\alpha}$ e $w = R e^{i\beta}$ con $\rho, R, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\rho, R \geq 0$ ABBIAMO

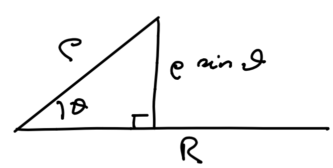


$$z\overline{w} = \rho R \, e^{i(\alpha-\beta)}$$

SE INDICO CON $\vartheta = \alpha - \beta$ L'ANGOLO, CON SEGNO, $z\hat{O}w$, ABBIAMO

$$z\overline{w} = \rho R \cos\vartheta + i \rho R \sin\vartheta$$

NOTIAMO CHE LA PARTE IMMAGINARIA DI QUESTA ESPRESSIONE:



$$\rho R \sin\vartheta$$

È UGUALE, A MENO DEL SEGNO, A DUE VOLTE L'AREA DEL TRIANGOLO zOw. INFATTI LA BASE Ow È LUNGA R E L'ALTEZZA $|\rho \sin\vartheta|$.

LA PARTE REALE $\rho R \cos\vartheta$ È INVECE DETTA PRODOTTO SCALARE DI z E w, E NOTIAMO CHE È UGUALE A 0 SE E SOLO SE $z\hat{O}w$ È UN ANGOLO RETTO.

CALCOLIAMO LE STESSE QUANTITÀ USANDO LE COORDINATE CARTESIANE.

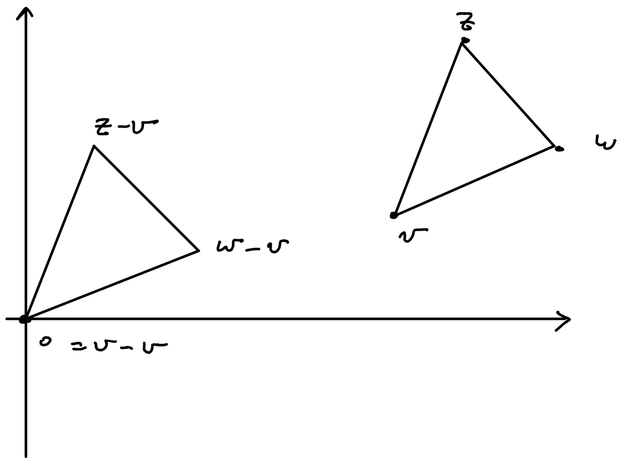
SE $z = x + iy$ e $w = u + iv$ OTTENIAMO

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = \text{prodotto scalare} = xu + yv$$

$$|\operatorname{Im}(z\bar{w})| = 2\,\text{area}(z\,0\,w) = |yu - xv|$$

ENTRAMBE QUESTE FORMULE VERRANNO GEN. NEL PROSEGUIO DEL CORSO.

LE STESSE CONSIDERAZIONI SI POSSONO FARE NEL CASO DI UN TRIANGOLO QUALSIASI $v\,w\,z$ TRASLANDO IL TRIANGOLO IN MODO DA PORTARE UN VERTICE NELL'ORIGINE



② CERCHIO PASSANTE PER TRE PUNTI E BIRAPPORTO

SIANO $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distinti. DEFINISCO IL BIRAPPORTO TRA a, b, c, d NEL SEGUENTE MODO

$$\operatorname{bir}(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}$$

VOGLIAMO CAPIRE QUANDO IL BIRAPPORTO È UN NUMERO REALE. ASSUMIAMO a, b, c NON ALLINEATI E LASCIAMO IL CASO IN CUI SIANO ALLINEATI COME ESERCIZIO.

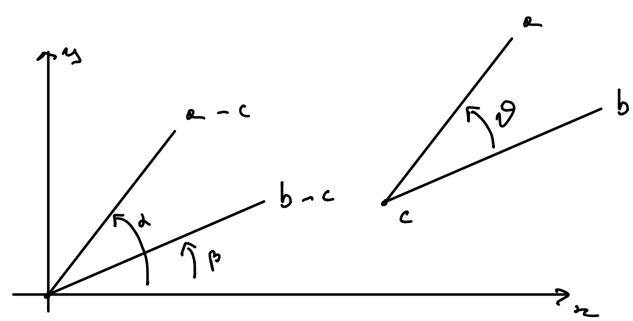
PARTIAMO DALLA CONDIZIONE $\operatorname{bir}(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$ OVVERO:

$$\operatorname{bir}(a,b,c,d) = \overline{\operatorname{bir}(a,b,c,d)}$$

CHE USANDO LE PROPRIETÀ DEL CONIUGIO E PORTANDO TUTTI I FATTORI CON LA C DA UNA PARTE E QUELLI CON LA D DALL'ALTRA POSSIAMO RISCRIVERE NELLA FORMA

$$(*) \qquad \frac{a-c}{\overline{a-c}} \cdot \frac{\overline{b-c}}{b-c} = \frac{a-d}{\overline{a-d}} \cdot \frac{\overline{b-d}}{b-d}$$

ANALIZZIAMO IL TERMINE DI SINISTRA



SE $a-c=\rho e^{i\alpha}$ E $b-c=R e^{i\beta}$ OTTENIAMO

$$\frac{a-c}{\overline{a-c}} = \frac{\rho e^{i\alpha}}{\rho e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

$$\frac{\overline{b-c}}{b-c} = \frac{R e^{-i\beta}}{R e^{i\beta}} = e^{-2i\beta}$$

QUINDI IL TERMINE DI SINISTRA È UGUALE A

$$e^{2i(\alpha-\beta)} = e^{2i\vartheta}$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO, $b\hat{c}a$. SIMILMENTE L'ESPRESSIONE SULLA DESTRA DELL'EQUAZIONE $(*)$ È UGUALE A

$$e^{2i\eta}$$

DOVE η È L'ANGOLO $b\hat{d}a$ E L'EQUAZIONE $(*)$

È EQUIVALENTE A

$$e^{2i\vartheta} = e^{2i\eta}$$

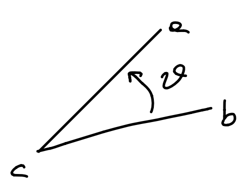
OVVERO $\boxed{2\vartheta = 2\eta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$

PER STUDIARE IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DI QUEST'ULTIMA EQUAZIONE RICORDO IL SEGUENTE TEOREMA DI GEOMETRIA DEL PIANO.

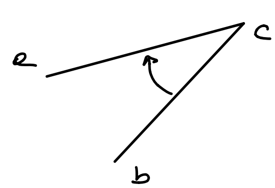
TEOREMA SIANO a, b, c TRE PUNTI NON ALLINEATI. LA RETTA ab DIVIDE IL PIANO IN DUE SEMIPIANI Π^+, CHE CONTIENE c, E Π^-. ALLORA IL CERCHIO Γ PASSANTE PER a, b, c È IL LUOGO DEI PUNTI d DI Π^+ TALI CHE $b\hat{d}a = b\hat{c}a$ E DEI PUNTI DI Π^- TALI CHE $b\hat{d}a = \pi - b\hat{c}a$.

È NECESSARIO A QUESTO PUNTO FARE UNA PRECISAZIONE SUGLI ANGOLI DEL TEOREMA E SUGLI ANGOLI ϑ E η DELL'UGUAGLIANZA CHE ABBIAMO RIQUADRATO SOPRA.

GLI ANGOLI AI QUALI SI FA RIFERIMENTO NEL TEOREMA SONO ANGOLI COMPRESI TRA 0 E π RADIANTI. GLI ANGOLI ϑ E η SONO INVECE ARGOMENTI DI NUMERI COMPLESSI E VARIANO QUINDI IN UN INTERVALLO LUNGO 2π. IN QUESTO CASO SCELGO ϑ e η COMPRESI TRA $-\pi$ e π.



ANGOLO CON $\vartheta > 0$



ANGOLO CON $\vartheta < 0$

SCEGLIENDO ϑ e η COMPRESI TRA $-\pi$ E π $|\vartheta|$ e $|\eta|$ SONO GLI ANGOLI USUALI

OSSERVO INFINE CHE SE $d \in \Pi^+$ η e ϑ HANNO LO STESSO SEGNO MENTRE SE $d \in \Pi^-$ HANNO SEGNI OPPOSTI.

QUINDI, L'EQUAZIONE (*) È EQUIVALENTE A:

$$d \in \Pi^+ \quad \text{E} \quad |\eta| = |\vartheta|$$

O

$$d \in \Pi^- \quad \text{E} \quad |\eta| = \pi - |\vartheta|$$

OVVERO $d \in \Gamma$, IL CERCHIO PER a, b, c.