# SPAZI AFFINI E COORDINATE BARICENTRICHE

**Avviso.** Nella trattazione dei sottospazi affini ci siamo discostati leggermente dall'approccio del libro. Le note, molto sintetiche, che seguono non sono un riassunto delle lezioni, nelle quali abbiamo fatto più esempi ed esercizi di quelli che troverete qui, ma vanno considerate ad integrazione delle lezioni e come un riferimento dove trovare le definizioni e i principali risultati che abbiamo illustrato a lezione.

## Sottospazi affini

I sottospazi vettoriali che abbiamo definito nelle precedenti lezioni sono una generalizzazione dei concetti di retta e piano passanti per l'origine. Vogliamo ora considerare l'analoga generalizzazione per rette e piani che non passano necessariamente per l'origine. Gli insiemi che si ottengono in questo caso si chiamano sottospazi affini e ne studieremo le proprietà similmente a quanto abbiamo fatto per i sottospazi vettoriali. Il punto di vista che prenderemo in queste note è il seguente: pensiamo i sottospazi affini come la traslazione di sottospazi vettoriali.

Iniziamo a definire cosa è una traslazione nel caso di uno spazio vettoriale qualsiasi. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Per ogni $v_0 \in V$ definiamo l'applicazione $T_{v_0} : V \longrightarrow V$ mediante

$$T_{v_0}(u) = u + v_0.$$

Le applicazioni $T_{v_0}$ si chiamano traslazioni e si osservi che non sono applicazioni lineari.

**Definizione 1.** Un sottoinsieme $A$ di $V$ è un sottospazio affine se è vuoto o se esiste un sottospazio vettoriale $W$ di $V$ e un elemento $v_0$ di $V$ tali che $A = T_{v_0}(W) = W + v_0$.

**Esercizio 1.** Si consideri $V = \mathbb{R}^2$ e si consideri la retta $W$ definita da $x = y$. Sia $v_0 = (2, 1)$ e $v_0' = (1, 0)$. Si dimostri che $T_{v_0}(W) = T_{v_0'}(W)$.

**Esercizio 2.** Sia $A$ un sottoinsieme di $V$. Allora $A$ è un sottospazio affine di $V$ se e solo preso $v_0 \in A$, si ha che $A - v_0$ è un sottospazio vettoriale.

Come mostrato nell'esercizio precedente dato un sottospazio affine possono esistere diverse traslazioni $v_0$ tali che $A = T_{v_0}(W)$, il sottospazio $W$ è invece univocamente individuato come spiega il seguente lemma.

**Lemma 2.** *Sia $A$ un sottospazio affine non vuoto di $V$ e siano $v_0, v_0' \in V$ e $W, W'$ sottospazi di $V$ tali che*

$$A = T_{v_0}(W) = T_{v_0'}(W').$$

*Allora $W = W'$.*

*Dimostrazione.* Abbiamo $A = W + v_0 = W' + v_0'$. Ponendo $w_0 = v_0' - v_0$ abbiamo $W' = W + w_0$ o equivalentemente $W = W' - w_0$. Dalla prima di questa due relazioni ricaviamo che $w_0 = 0 + w_0 \in W'$. Quindi, utilizzando la seconda relazione e il fatto che $W'$ è un sottospazio, ricaviamo $W' = W - w_0 = W'$. □

**Definizione 3.** Sia $A$ un sottospazio affine di $V$ non vuoto, il supporto di $A$, che verrà indicato in queste note con $\operatorname{supp} A$, è definito come l'unico sottospazio vettoriale $W$ di $V$ tale che esiste $v_0 \in V$ per cui $A = T_{v_0}(W)$. Il supporto di $A$ viene anche detto il sottospazio vettoriale soggiacente $A$. La dimensione di $A$ è definita come la dimensione di $W$.

Si pone inoltre in modo convenzionale $\dim \varnothing = -1$ e $\operatorname{supp} \varnothing = \varnothing$.

Un sottospazio affine di dimensione 1 di dice una retta affine (o semplicemente una retta), uno di dimensione 2 un piano (o semplicemente un piano) e uno di dimensione uguale a $\dim V - 1$ un iperpiano affine.

L'esercizio seguente caratterizza in modo diverso il supporto di un sottospazio affine.

**Esercizio 3.** Sia $A$ uno sottospazio affine non vuoto di $V$. Allora

$$\operatorname{supp}(A) = \{v \in V \,:\, A + v \subset A\}.$$

## Descrizione mediante equazioni di sottospazi affini

Vogliamo ora vedere come può essere descritto un sottospazio affine. Come nel caso dei sottospazi vettoriali esistono tre modi fondamentali: descrivendo il sottospazio mediante equazioni, parametrizzando il sottospazio o descrivendo il sottospazio come sottospazio generato.

Iniziamo dalla descrizione di un sottospazio mediante equazioni. Questo modo di descrivere il sottospazio è detta anche forma cartesiana.

**Proposizione 4.** *Sia $F : V \longrightarrow U$ una applicazione lineare e sia $b \in U$. Sia $A = \{v \in V \,:\, F(v) = b\}$. Allora $A$ è un sottospazio affine e se $A \neq \varnothing$ allora* $\operatorname{supp} A = \ker F$.

*Dimostrazione.* Se $A = \varnothing$ non c'è nulla da dimostrare. Se $A \neq \varnothing$, sia $v_0 \in A$ e sia $W = \ker F$ Dimostriamo che $A = W + v_0$. Infatti se $w \in W$ allora

$$F(w + v_0) = F(w) + F(v_0) = 0 + b = b$$

e quindi $W + v_0 \subset A$. Viceversa se $a$ in $A$ allora $F(w - v_0) = b - b = 0$ e quindi $a \in W + v_0$. $\square$

**Esempio 4.** Sia $A$ il sottoinsieme di $\mathbb{C}^3$ descritto dalle equazioni $x + y + z = 2i$ e $x - y = 0$. Allora $A$ è una retta affine.

Le equazioni che descrivono $A$ sono equivalenti a dire che $A = \{v \in \mathbb{C}^3 \,:\, F(x, y, z) = b\}$ dove $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ è l'applicazione lineare definita da $F(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$ e $b = (2i, 0)$.

Osserviamo che $A \neq \varnothing$ infatti $(i, i, 0) \in A$. Quindi il supporto di $A$ è uguale a $\ker F$. Poiché il nucleo di $F$ ha dimensione 1 ricaviamo che la dimensione di $A$ è 1 e quindi che $A$ è una retta affine.

## Parentesi sulle parametrizzazioni

Le osservazioni presenti in questa sezione, non le abbiamo fatte quando abbiamo trattato i sottospazi affini, ma in diversi momenti precedenti. Poiché mi sembra una parte che molti studenti hanno trovato ostica, colgo l'occasione per ripetere alcuni concetti fondamentali. Mi concentrerò su alcuni esempi e su una unica definizione generale.

Supponiamo di avere un sottoinsieme $X$ di $\mathbb{R}^n$. Molto spesso un tale sottoinsieme in matematica appare descritto da equazioni, nel nostro corso, stiamo chiamando questo modo di descrivere un sottoinsieme forma cartesiana.

Facciamo un esempio, supponiamo che $X$ sia la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine. Allora $X$ è descritto dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ o, in altre parole, è l'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano cartesiano le cui coordinate verificano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$. Un ulteriore modo di dire la stessa cosa è il seguente. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$. Allora $X$ è l'insieme dei punti $(x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $f(x, y) = 1$ o equivalentemente $X = f^{-1}(1)$.

Un altro modo di descrivere gli stessi sottoinsiemi che, per esempio, usiamo spesso in fisica, è la parametrizzazione. Facciamo sempre l'esempio della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Supponiamo di muoverci lungo la circonferenza a velocità costante partendo dal punto $(1, 0)$. Supponiamo di percorrere un giro ogni secondo. Quindi dopo $t$ secondi avremo percorso un angolo di $2\pi t$ radianti e le coordinate del punto nel quale ci troviamo saranno $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Abbiamo quindi costruito una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ che al variare di $t$ percorrere tutta la circonferenza. In altre parole l'immagine di $g$ sono esattamente i punti della circonferenza. In particolare ogni punto della circonferenza può essere scritto nella forma $g(t)$ per qualche $t$. Per parlare di parametrizzazione vorremmo anche che tale $t$ sia unico ovvero che la funzione che parametrizza il nostro insieme sia iniettiva. Per ottenere una tale funzione nell'esempio della circonferenza, consideriamo la restrizione della funzione $g$ all'intervallo $[0, 1)$. Consideriamo quindi $h : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita esattamente come $g$, ovvero $h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. In questo modo abbiamo che per ogni punto della circonferenza $P$ esiste un unico $t$ tale che $P = h(t)$.

Facciamo un ulteriore esempio nel quale sono necessarie due coordinate. Consideriamo il cilindro $Y$ di raggio 1, asse $x$, una base posta in $x = 0$ e l'altra posta in $x = 2$. Allora il cilindro è descritto dall'equazione $y^2 + z^2 = 1$ e dalla disequazione $0 \leqslant x \leqslant 2$. Per percorrere tutti i punti del cilindro dobbiamo muoverci in due direzioni, una circolare attorno al cilindro e una orizzonatale, lungo il cilindro. La parametrizzazione che si ottiene in questo caso è la funzione $h : [0, 1) \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$h(t, s) = (s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Diamo quindi la seguente provvisoria definizione di parametrizzazione. Se $X$ è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale $V$ una parametrizzazione di $X$ è una mappa $h : U \longrightarrow V$ tale che $U$ è un sottoinsieme di $\mathbb{K}^k$, $h$ è iniettiva e l'immagine di $h$ è uguale a $X$.

Questa non è la definizione completa di parametrizzazione che si usa in matematica o in fisica che è più complicata di così e che forse vedrete ad analisi 2. Ci serve però come guida per motivare il concetto di parametrizzazione di un sottospazio affine che sarà molto più restrittivo di quello qui enunciato. Per esempio per quanto riguarda la parametrizzazione di sottospazi affini avremo sempre $U = \mathbb{K}^k$ e anche la mappa $h$ avrà una forma molto particolare.

### Descrizione parametrica di un sottospazio affine

Per descrivere un sottospazio affine in forma parametrica non sono sufficienti le applicazioni lineari, ma è necessaria una loro generalizzazione detta applicazioni affini. Le applicazioni affini sono le applicazioni che si possono scrivere come una applicazione lineare più una traslazione.

**Definizione 5.** Siano $V$ e $U$ due spazi vettoriali. $F : V \longrightarrow U$ si dice una applicazione affine se esiste un vettore $u_0 \in U$ e una applicazione lineare $L : V \longrightarrow U$ tali che $F(v) = L(v) + u_0$.

Osserviamo che l'immagine di una applicazione affine è sempre un sottospazio affine. Infatti se $W$ è il sottospazio lineare che è l'immagine di $L$ allora l'immagine di $F$ è $W + u_0$ e quindi è un sottospazio affine di dimensione uguale alla dimensione di $W$ ovvero al rango di $L$.

**Definizione 6.** Sia $A$ un sottospazio affine di $V$ diverso dal vuoto. Allora una parametrizzazione di $A$ è una applicazione affine $F : \mathbb{K}^k \longrightarrow V$ che sia iniettiva e tale che l'immagine di $F$ sia uguale a $A$.

Si osservi che se $F$ è una parametrizzazione di $A$ allora $k$ è la dimensione di $A$. Osserviamo inoltre che se $F$ è una applicazione affine allora $F$ è iniettiva se e solo se $L$ è iniettiva, e che ogni applicazione affine ed iniettiva è una parametrizzazione della sua immagine.

**Esempio 5.** Sia $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da $h(t) = (3t + 5, 2t)$. Allora $h$ è un applicazione iniettiva e la sua immagine è un sottospazio affine $X$ di dimensione 1 ovvero una retta. Inoltre se $x, y$ sono punti di $X$ allora $x = 3t + 5$ e $y = 2t$. Ricavando $t$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima otteniamo che la retta $X$ può essere anche descritta dall'equazione $2x = 3y + 10$.

**Esempio 6** (Come passare dalla forma cartesiana alla descrizione parametrica)**.** Illustriamo come ricavare la parametrizzazione di un sottospazio affine dalla sua descrizione cartesiana con un esempio. Consideriamo un sottospazio affine $A$ di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni $x + y + z + w = 1$ e $x + 2y + w = 2$. Quindi se $F(x, y, z, w) = (x + y + z + w, x + 2y + w)$ e $b = (1, 2)$ abbiamo che $F$ è una applicazione di rango 2 e che $A$ è un sottospazio affine non vuoto di dimensione 2 ovvero un piano.

Semplificando il sistema, per esempio riducendo a scalini o in qualsiasi altro modo, possiamo ricavare che è equivalente al sistema

$$x = -2z - w \qquad y = z + 1.$$

Quindi

$$A = \{(-2z - w, z + 1, z, w) \, : \, z, w \in \mathbb{R})\}$$

Questo è equivalente a dire che l'applicazione $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $h(s, t) = (-2s - t, s + 1, s, t)$ è una parametrizzazione di $A$.

**Esempio 7** (Come passare dalla descrizione parametrica alla forma cartesiana: primo modo)**.** Sia $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definita da $h(s, t) = (s + t + 2, s, t - s, t + 2, t)$ e sia $A$ l'immagine di $h$. Possiamo scrivere $h(s, t) = L(s, t) + v_0$ dove

$$L(s, t) = (s + t, s, t - s, t, t) \qquad v_0 = (2, 0, 0, 2, 0).$$

Si può verificare che $L$, e quindi $h$ è iniettiva. Quindi $h$ è una parametrizzazione di $A$ e $A$ ha dimensione 2. Sia inoltre $W$ l'immagine di $L$, quindi $W$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 e $A = W + v_0$.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare che ha nucleo uguale a $W$. Abbiamo visto come trovare una tale applicazione quando abbiamo studiato gli spazi vettoriali. Un possibile modo di procedere che abbiamo visto è il seguente: i vettori

$$v_1 = L(1, 0) = (1, 0, 1, 1, 1) \qquad v_2 = L(0, 1) = (1, 1, 1, 0, 0)$$

Completiamo $v_1, v_2$ ad una base di $\mathbb{R}^5$ per esempio prendendo $v_1, v_2, e_1, e_2, e_4$ e troviamo delle applicazioni lineari $f_1, f_2, f_4 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $f_i(v_1) = f_i(v_2) = f_i(e_j) = 0$ per $i \neq j$ e $f_i(e_i) = 1$ otteniamo

$$f_1(x, y, z, u, v) = x - z$$
$$f_2(x, y, z, u, v) = y - z + v$$
$$f_4(x, y, z, u, v) = u - v$$

Quindi se definiamo $F(x,y,z,u,v) = (x - z, y - z + v, u - v)$ abbiamo $\ker F = W$, infine se poniamo $b = F(v_0) = (2,0,2)$ abbiamo che $A$ è descritto dalle equazioni

$$F(x,y,z,u,v) = b.$$

**Esempio 8** (Come passare dalla descrizione parametrica alla forma cartesiana: secondo modo)**.** Vogliamo illustrare un modo più diretto per ricavare la forma cartesiana da una descrizione parametrica. Siano $h$ ed $A$ come nell'esempio precedente. Quindi abbiamo

$$x = s + t + 2 \qquad y = s \qquad z = t - s \qquad u = t + 2 \qquad v = t.$$

dalla seconda e dalla quinta equazione possiamo ricavare $s, t$ in funzione di $y$ e $v$ sostituendo nelle altre equazioni ricaviamo

$$x = y + v + 2 \qquad z = v - y \qquad u = v + 2.$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$x - y - v = 2 \qquad y + z - v = 0 \qquad u - v = 2.$$

che è una descrizione in forma cartesiana di $A$.

Questo esempio illustra un altro modo di procedere: si ricavano i parametri (in questo caso $s$ e $t$) in funzioni delle variabili (in questo caso $x, y, z, u, v$) e poi si sostituiscono nelle equazioni iniziali

In questo caso questo modo di procedere era particolarmente semplicemente perché era molto facile ricavare i parametri $s, t$ in funzione di delle variabili $x, y, z, u, v$ e in particolare avevamo $t = v$ e $s = y$. In generale questo è sempre fattibile anche se le euqazioni sono meno semplici. Supponiamo per esempio di essere un po' distratti e di scegliere invece della seconda e della quinta equazione la prima e la terza:

$$x = s + t + 2 \qquad z = t - s$$

i questo caso avremmo ricavato

$$s = \frac{x - z - 2}{2} \qquad t = \frac{x + z - 2}{2}$$

e sostituendo $s, t$ nelle equazioni iniziali come abbiamo fatto prima avremmo ottenuto un'altra descrizione cartesiana di $A$. Qualche cautela è comunque necessaria, per esempio se avessimo scelto la quarta e la quinta equazione

$$u = t + 2 \qquad v = t$$

non avremmo potuto ricavare $s$ in funzione di $u$ e $v$ ma solo $t$. Utilizzando la riduzione a scalini si potrebbe dire con precisione quali possono essere le equazioni da estrarre per ricavare $s$ e $t$. Tuttavia non ci interessa, dare un algoritmo da seguire passo per passo ma solo indicare una strada con l'avvertenza che qualche cautela è necessaria.

## Cambiare l'origine di uno spazio vettoriale

Questo paragrafo non è strettamente necessario per capire quello che segue ma ne fornisce una spiegazione geometrica che, in qualche forma, avete visto apparire anche nel corso di Fisica.

**Il caso del piano.** Concentriamoci inanzitutto sull'esempio del piano euclideo $E$. Una volta fissata una origine $O$ del piano abbiamo definito una struttura di spazio vettoriale su $E$, la cui somma indichiamo con $+$ e il prodotto per scalare con $\cdot$. Ricordiamo la definizione, se $P$ e $Q$ sono punti del piano definiamo $P + Q$ come il terzo vertice del parallelogramma $O, P, P + Q, Q$.

La definizionedi questa somma dipende dall'origine scelta. Vogliamo capire cosa cambia quando cambiamo origine. Sia $O'$ un altro punto di $E$ e sia $v_0 = \overrightarrow{OO'}$. Abbiamo quindi una nuova definizione di somma dove $P +' Q$ è il terzo vertice del parallelogramma $O', P, P + Q, Q$, e similmente definiamo un nuovo prodotto per scalare che indichiamo con $\cdot'$. Vogliamo ora riesprimere la nuova somma e il nuovo prodotto per scalare utilizzando la vecchia somma e il vecchio prodotto. Per fare questo possiamo pensare di traslare il parallelogramma $O', P, P +' Q, Q$ mediante la traslazione $T_{-v_0}$ come illustrato in figura 1. Otteniamo quindi un parallelogramma $O, P_0, P_0 + Q_0, Q_0$ dove $P_0 = P - v_0$ e $Q_0 = Q - v_0$ e $P_0 + Q_0 = P + Q - v_0$, quindi

$$P +' Q = P_0 + Q_0 + v_0 = (P - v_0) + (Q - v_0) + v_0 = P + Q - v_0.$$

Con un ragionamento analogo possiamo esprimere il prodotto per scalare $\cdot'$ utilizzando somma e prodotto per scalare $+, \cdot$ ottendo

$$\lambda \cdot' P = \lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot v_0.$$

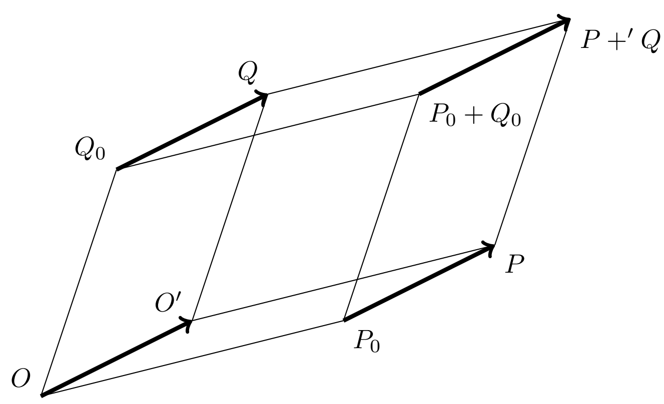


Figura 1. Cambiare origine in uno spazio vettoriale. Le quattro frecce in grassetto rappresentano la traslazione ottenuta sommando $v_0$

**Il caso generale.** Similmente possiamo procedere con uno spazio vettoriale qualsiasi. Sia $V$ uno spazio vettoriale con somma $+$, prodotto $\cdot$ e elemento neutro che indico con $O$. Fissiamo ora un elemento $v_0$ dello stesso spazio vettoriale. Ora definiamo una nuova stuttura di spazio vettoriale definendo

$$u +' v = u + v - v_0 \qquad \lambda \cdot' v = \lambda \cdot v + (1-\lambda) \cdot v_0$$

Questa nuova somma e questo nuovo prodotto definiscono una nuova struttura di spazio vettoriale che ha come origine il vettore $v_0$ che per questo motivo indichiamo anche $O'$. Per dimostrare questa affermazione dovremmo verificare che gli assiomi di spazio vettoriale sono verificati. Facciamo solo il caso della commutatività della somma:

$$u +' v = u + v - v_0 = v + u - v_0 = v +' u.$$

Le altre verifiche sono tutte altrettanto semplici. Lo spazio vettoriale che otteniamo in questo modo lo indichiamo con $V'$.

L'osservazione alla quale siamo interessati è la seguente: alcune particolari somme non dipendono dall'origine che abbiamo scelto.

**Lemma 7.** *Con le notazioni di prima siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Allora*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = \lambda_1 \cdot' v_1 +' \dots +' \lambda_n \cdot' v_n.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innazitutto che

$$u_1 +' \dots +' u_n = u_1 + \dots + u_n - (n-1) \cdot v_0 \tag{1}$$

infatti per $n = 2$ è la definizione di $+'$ e per $n > 2$ si può dimostrare per induzione (verificare questa affermazione almeno per $n = 3$). Consideriamo ora la somma che appare nell'enunciato:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot' v_1 +' \dots +' \lambda_n \cdot' v_n &= \big(\lambda_1 \cdot v_1 + (1-\lambda_1) \cdot v_0\big) +' \dots +' \big(\lambda_n \cdot v_n + (1-\lambda_n) \cdot v_0\big) \\
&= \big(\lambda_1 \cdot v_1 + (1-\lambda_1) \cdot v_0\big) + \dots + \big(\lambda_n \cdot v_n + (1-\lambda_n) \cdot v_0\big) - (n-1) \cdot v_0 \\
&= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n + (1 - \lambda_1 + 1 - \lambda_2 + \dots + 1 - \lambda_n) \cdot v_0 - (n-1) \cdot v_0 \\
&= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n + \big(n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) - (n-1)\big) \cdot v_0 \\
&= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n + \big(1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\big) \cdot v_0 \\
&= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n
\end{aligned}$$

dove per la prima uguaglianza abbiamo usato la definizione di $\cdot'$, per la seconda uguaglianza la formula (1); per la terza uguaglianza abbiamo usato le proprietà associative, commutative e distributive di $+$ e $\cdot$, per la quarta e quinta uguaglianza abbiamo usato la proprietà distributiva di $+$ e $\cdot$ e effettuato qualche semplificazione, ed infine nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. □

Una combinazione lineare

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

dei vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ si dice una combinazione affine se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Per i sottospazi affini il concetto di combinazione affine gioca lo stesso ruolo che giocava il concetto di combinazione lineare per i sottospazi lineari.

**Lemma 8.** *Se $A$ è un sottospazio affine e $v_1, \ldots, v_n \in A$ allora ogni loro combinazione affine è un elemento di $A$.*

*Dimostrazione.* Se $A = \varnothing$ non c'è nulla da dimostrare. Se $A \neq \varnothing$ e sia $A = W + v_0$ con $W$ sottospazio vettoriale di $V$. Siano quindi $v_i = w_i + v_0$ e sia $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_i \lambda_i = 1$. Allora

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) v_0 = w + v_0$$

con $w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$ appartente a $W$ in quanto $W$ è un sottospazio vettoriale. In particolare $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in A$. □

Vale il viceversa del lemma appena dimostrato anzi basta assumere che le combinazioni affini di coppie di elementi di $A$ siano ancora in $A$.

**Lemma 9.** *Sia $A$ un sottoinsieme di $V$ e supponiamo che presi qualsiasi $u, v$ in $A$ ogni loro combinazione affine appartiene ad $A$. Allora $A$ è un sottospazio affine.*

*Dimostrazione.* Se $A = \varnothing$ non c'è nulla da dimostrare. Se $A \neq \varnothing$ sia $v_0 \in A$ e dimostriamo che $W = A - v_0$ è un sottospazio vettoriale. Sia $w = v - v_0$ con $v \in A$ un elemento di $W$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ allora

$$\lambda w = \big(\lambda v + (1 - \lambda) v_0\big) - v_0$$

è in $W$ perché $\lambda v + (1 - \lambda) v_0$ è una combinazione affine di due elementi di $A$ e quindi è in $A$.

Siano ora $w_1 = v_1 - v_0$ e $w_2 = v_2 - v_0$ con $v_1, v_2 \in A$ due elementi di $V$ e dimostriamo che $w_1 + w_2$ è in $W$. Osserviamo che $v = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$ è una combinazione affine di $v_1$ e $v_2$, quindi appartiene ad $A$. Calcoliamo ora la somma

$$w_1 + w_2 = v_1 + v_2 - 2v_0 = (v_1 + v_2 - v_0) - v_0 = (2v - v_0) - v_0$$

e osserviamo che $2v - v_0$ è una combinazione affine di due elementi di $A$ e quindi è in $A$ e la somma è in $W$. □

I due lemmi appena dimostrati suggeriscono un modo di definire il sottospazio affine generato da un sottoinsieme.

**Definizione 10.** Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ definiamo il sottospazio affine generato da $v_1, \ldots, v_n$ nel seguente modo:

$$\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n) = \big\{\text{tutte le combinazioni affini di } v_1, \ldots, v_n\big\}.$$

Osserviamo che in particolare $\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n)$ contiene $v_1, \ldots, v_n$.

**Lemma 11.** *Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, allora $\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n)$ è il più piccolo sottospazio affine contenente $v_1, \ldots, v_n$.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ un sottospazio affine contenente $v_1, \ldots, v_n$ allora per il lemma 8, $A$ contiene $\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n)$. Rimane quindi da dimostrare che $\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n)$ è un sottospazio affine. Applichiamo il risultato del lemma 9. Siano $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $u = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ due combinazioni affini. Siano inoltre $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda + \mu = 1$. Allora

$$\lambda v + \mu u = (\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda \lambda_n + \mu \mu_n) v_n$$

e $\sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i = \lambda + \mu = 1$ e quindi anche $\lambda v + \mu u$ è una combinazione affine di $v_1, \ldots, v_n$ e quindi un elemento di $A$. □

Facciamo qualche esempio. Se abbiamo due punti distinti $p, q$ allora se $p = q$ il più piccolo sottospazio affine è il punto $p$, se invece $p \neq q$ il più piccolo sottospazio affine contenente $p$ e $q$ è la retta passante per $p$ e $q$ ovvero l'insieme dei punti $\lambda p + (1 - \lambda) q$ con $\lambda \in \mathbb{K}$. In generale è sempre bene avere presenti i casi di dimensione 1 e 2.

Lasciamo da dimostrare per esercizio un paio di altre proprietà.

**Esercizio 9.** Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$, allora $\operatorname{supp}(\operatorname{Spanaff}(v_1, \ldots, v_n))$ è generato da $v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1$.

**Esercizio 10.** Se $W$ è generato da $w_1, \ldots, w_n$ allora $W + v_0$ è lo span affine di $v_0$ e $w_1 + v_0, \ldots, w_n + v_0$.

Sistemi di riferimento affine e coordinate affini (o baricentriche)

Nella sezione precedente abbiamo visto come definire per sottospazi affini la nozione di sottospazio affine generato. In questa sezione definiremo un analogo del concetto di base.

**Definizione 12.** Sia $A$ un sottospazio affine e siano $v_0, v_1, \dots, v_n \in A$. Allora $v_0, \dots, v_n$ si dicono un sistema di riferimento affine se ogni elemento di $A$ si scrive in modo unico come combinazione affine di $v_0, \dots, v_n$.

Se $v_0, \dots, v_n$ sono un sistema di riferimento affine di $A$ e se $v = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$ con $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ allora $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sono le coordinate affini o baricentriche di $v$ rispetto al riferimento $v_0, \dots, v_n$

**Proposizione 13.** *Sia $A$ un sottospazio affine e siano $v_0, v_1, \dots, v_n \in A$. Allora $v_0, \dots, v_n$ sono un sistema di riferimento affine di $A$ se e solo se $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ sono una base di* $\operatorname{supp} A$.

*Dimostrazione.* Sia $W = \operatorname{supp} A$ e sia $w_i = v_i - v_0$. Dimostriamo solo una delle due implicazioni ovvero che se $w_1, \dots, w_n$ sono una base di $W$ allora $v_0, \dots, v_n$ sono un sistema di riferimento affine di $A$. Sia $v$ un elemento di $A$ e sia $w = v - v_0$. Per definizione di base di uno spazio vettoriale esistono unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $w = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$. Quindi

$$v = w + v_0 = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + v_0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + (1 - \sum_{i=1}^n a_i) v_0$$

è una combinazione affine di $v_0, \dots, v_n$. Ora dimostriamo che tale combinazione è unica. Sia $v = b_0 v_0 + \cdots + b_n v_n$ con $\sum_{i=0}^n b_i = 1$ e dimostriamo $a_i = b_i$ per $i \neq 0$ e che $b_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$. Calcoliamo $w$:

$$\begin{aligned} w = v - v_0 &= (b_0 - 1) v_0 + b_1 (w_1 + v_0) + \cdots + (w_n + v_0) \\ &= (\sum_{i=0}^n b_i - 1) v_0 + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n \\ &= b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n \end{aligned}$$

da cui ricaviamo $b_i = a_i$ per $i \neq 0$ perché i $w_i$ sono linearmente indipendenti. Infine $b_0 = 1 - \sum_{i=1}^n b_i = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$. □

Vediamo alcune conseguenze di questo lemma. La prima è che se $v_0, \dots, v_n$ è un sistema di riferimento di $A$ allora la dimensione di $A$ è uguale a $n$. Questo è in accordo con i casi di dimensione 1 e 2 a noi più familiari: per individuare una retta servono due punti e per individuare un piano servono 3 punti. Il prossimo lemma ci fornisce l'interpretazione geometrica di un sistema di riferimento affine. Prima di enunciare il lemma facciamo l'esempio del piano. Dal lemma precedente sappiamo che un sistema di riferimento affine è dato da tre punti. Presi tre punti a caso nel piano ci chiediamo se possiamo caratterizzare geometricamente il fatto che siano un sistema di riferimento affine. La risposta non è molto sorprendente, i tre punti sono un sistema di riferimento affine se e solo se non sono allineati ovvero se non generano un sottospazio affine di dimensione inferiore. Il lemma che andiamo ad enunciare dimostra questo fatto e lo generalizza a dimensione qualsiasi.

**Proposizione 14.** *Sia $A$ un sottospazio affine e siano $v_0, v_1, \dots, v_n \in A$. Allora $v_0, \dots, v_n$ sono un sistema di riferimento affine di $A$ se e solo se generano $A$ e se $v_0, \dots, v_n$ non sono contenuti in un sottospazio affine di dimensione minore di $n$.*

*Dimostrazione.* Anche in questo caso dimostriamo una sola delle due implicazioni e lasciamo l'altra per esercizio. Supponiamo che $v_0, \dots, v_n$ non siano contenuti in un sottospazio di dimensione minore di $n$ e dimostriamo che sono un sistema di riferimento affine di $A$. Per la proposizione precedente dobbiamo dimostrare che $w_1 = v_1 - v_0, \dots, w_n = v_n - v_0$ sono una base di $W = \operatorname{supp} A = A - v_0$.

Per il risultato dell'esercizio 9 sappiamo che $w_1, \dots, w_n$ generano $W$ quindi rimane da dimostrare che sono linearmente indipendenti. Supponiamo che siano linearmente dipendenti allora $\dim W < n$ e quindi $\dim A = \dim W < n$, ma allora $v_0, \dots, v_n$ sono contenuti in un sottospazio di dimensione minore di $n$ contro le ipotesi. □

**Esempio 11.** In $\mathbb{C}^3$ si consideri il sottospazio affine $A$ generato da $v_0 = (1, i, 0)$, $v_1 = (0, i, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 1)$. Si determinino dimensione di $A$, una parametrizzazione di $A$ e si descriva $A$ in forma cartesiana.

Sia $W = \operatorname{supp} A$, $w_1 = v_1 - v_0 = (-1, 0, 1)$ e $w_2 = v_2 - v_0 = (1, -i, 1)$. I vettori $w_1$ e $w_2$ sono linearmente indipendenti quindi $\dim A = \dim W = 2$ e $v_0, v_1, v_2$ sono un sistema di riferimento affine di $A$.

Una parametrizzazione di $A$ si ottiene allora nel sequente modo: $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definita da

$$\begin{aligned} h(s,t) &= sv_1 + tv_2 + (1-s-t)v_0 \\ &= (2t + (1-s-t), si + (1-s-t)i, s+t) \\ &= (1-s+t, i-it, s+t) \end{aligned}$$

ovvero

$$x = 1-s+t \qquad y = i - ti \qquad z = s+t.$$

Dalla prima e dalla terza equazione ricaviamo

$$t = \frac{x+z-1}{2} \qquad s = \frac{z-x+1}{2}$$

e sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$y = i - i\frac{x+z-1}{2}$$

da cui ricaviamo la forma cartesiana di $A$: $x - 2iy + z = 3$.

### Intersezione e somma di sottospazi affini

Se $A$ e $B$ sono due sottospazi affini definiamo

$$A +_{aff} B = \{\lambda u + (1-\lambda)v \,:\, u \in A, v \in B, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Lasciamo per esercizio da dimostrare le seguenti proprietà di somma e intersezione.

**Esercizio 12.** Se $A$ e $B$ sono due sottospazi affini allora $A \cap B$ è un sottospazio affine.

**Esercizio 13.** Se $A$ e $B$ sono sottospazi affini allora $A +_{aff} B$ è un sottospazio affine. È inoltre il più piccolo sottospazio affine contenente $A$ e $B$.

**Esercizio 14.** Se $v_1, \ldots, v_n$ generano lo spazio affine $A$ e $u_1, \ldots, u_m$ lo spazio affine $B$ allora i vettori $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ generano lo spazio affine $A +_{aff} B$.

**Esercizio 15.** Siano $A$ e $B$ sottospazi affini e sia $A \cap B \neq \varnothing$ allo

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A +_{aff} B)$$

**Esercizio 16.** Siano $A$ e $B$ sottospazi affini e sia $A \cap B = \varnothing$ allora

$$\dim(A +_{aff} B) \leqslant \dim A + \dim B + 1.$$

Fare un esempio in cui nella formula precedente vale l'uguaglianza e un esempio nel quale vale il minore stretto.

Qualche altro esercizio si trova sul libro e sul foglio degli esercizi settimanali.