Esercizio 1. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione.

Esercizio 2. Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano $p_1, \ldots, p_n$ si consideri il numero $m = p_1 \cdots p_n + 1$ e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti.

Numeri complessi

Esercizio 3. Calcolare $(1+i)^2$. Calcolare $(3+4i)\cdot(3-2i)$.

Esercizio 4. Calcolare parte reale e parte immaginaria del reciproco di $(1+7i)$ e di $(1+i)$.

Esercizio 5. Verificare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ e che $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

Esercizio 6. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di -1. [si consiglia di utilizzare le coordinate polari]

Esercizio 7. Risolvere l'equazione $t^2 + 2t + 10 = 0$. Calcolare parte reale e parte immaginaria degli z tali che $z^2 = 5 + 12i$.

Esercizio 8. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$. [si consiglia di utilizzare le coordinate polari]

Esercizio 9. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z-i}{z+i}$$

è un numero reale.

Esercizio 10. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{|z-i|}{|z+i|} = 2.$$

Esercizio 11. Si verifichi che per ogni $z \in mC$ si ha

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

Esercizio 12. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 13. Verificare che per ogni numero reale θ,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esercizio 14. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 15. Calcolare $(1-i)^{24}$. Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Esercizio 16. Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati mostrare che il luogo degli z tali che $bir(a,b,c,z)$ è un numero reale è il cerchio passante per a, b, c.

Esercizio 17. Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Spazi vettoriali

Esercizio 18. Verificare la proprietà associativa e la proprietà distributiva per K^n

Altri esercizi sui complessi

Esercizio 19 (Daddi)**.** Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + k\,i)\,z = 8 - 9\,i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 20 (Daddi)**.** Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione. Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma $2\,z^3 + ...\,z^2 + ...\,z + ... = 0$, dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono -2 e $-1 + 4\,i$. Si dica qual l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

Esercizio 21 (Daddi)**.** Assegnata l'equazione

$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{368} z - 18 + \frac{k}{z} = 0$$

dove k un parametro reale, si determinino gli eventuali valori di k in modo che le soluzioni siano non reali ed abbiano modulo uguale a $\sqrt{10}$.

Esercizio 22 (Daddi)**.** Tra i numeri complessi della forma

$$z = k + 1 + i\,(2\,k - 3)$$

dove k un numero reale, determinare quello avente modulo minimo.

Esercizio 23 (Daddi)**.** Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}(z - 2 + 4\,i)| \leqslant 1 \\ |z - 1 + 3\,i| > 3\,. \end{cases}$$

Sottospazi, spazio vettoriale generato

Esercizio 24. Si esibisca un insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$ per $n \leqslant 5$.

Esercizio 25 (da fare dopo l'esercizio 4.5 del libro)**.** Si esibisca un insieme di generatori per $\mathbb{R}[t]_3$.

Esercizio 26. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi non ha dimensione finita.

Esercizio 27. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti

(1) $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di V;
(2) $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti;
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V;

Esercizio 28. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia X, Y, Z dei sottospazi di dimensione 3 di V. Sia $a = \dim X \cap Y$, $b = \dim X \cap Z$, $c = \dim Y \cap Z$ e $d = \dim X \cap Y \cap Z$.

(1) si dimostri che $a = 2$ o 3;
(2) si dimostri che non può essere $d = 0$;
(3) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 2$;
(4) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 1$;
(5) si descrivano tutte le quadruple (a, b, c, d) che si possono ottenere al variare di X, Y, Z.

Sottospazi affini

Esercizio 29. Sia L la retta di $\mathbb{R}^2$ di equazioni $x + y + 1 = 0$ si determini un sistema di riferimento affine di L e una parametrizzazione di L.

Esercizio 30. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z + w \\ y + w \\ x - y + z \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre $w_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $Z = F^{-1}(w_0)$.

a) Si calcoli la dimensione di Z;
b) Si determini una parametrizzazione di Z;
c) Si determini un sistema di riferimento affine per Z.
d) si scriva il punto $(3, 2, 0, 0)$ come combinazione affine del sistema di riferimento scelto nel punto precedente.

Esercizio 31. Sia $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$G\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t+1 \\ s-t \\ t \end{pmatrix}$$

a) si dimostri che G è una parametrizzazione di un sottospazione affine Z di $\mathbb{R}^3$;
b) si calcoli la dimensione di Z;
c) si determini un sistema di riferimento affine di Z.

Esercizio 32. Sia $Z = T_{v_0}(W)$ un sottospazio affine dello spazio vettoriale V e sia W un sottospazio di V. Siano $w_1, \ldots, w_n$ elementi di W. Si dimostri che $w_1, \ldots, w_n$ è una base di W se e solo se $P_0 = 0$, $P_1 = v_0 + w_1, \ldots, P_n = v_0 + w_n$ è un sistema di riferimento affine di Z.

Esercizio 33. Si dimostri che l'intersezione di sottospazi affini è un sottospazio affine.

Esercizio 34. Siano Z e Y due sottospazi affini di V. Si definisca la somma affine di Z e Y come l'insieme

$$X = \{az + by \,:\, a + b = 1,\ z \in Z,\ y \in Y\}$$

Si dimostri che

a) X è un sottospazio affine;
b) se $Y \cap Z \neq \varnothing$ allora $\dim X + \dim Y \cap Z = \dim Y + \dim Z$;
c) se $Y \cap Z = \varnothing$ allora $\dim X \leqslant \dim Y + \dim Z + 1$;
d) fare un esempio nella formula precedente nel quale vale l'uguaglianza e uno nel quale vale la disuguaglianza stretta.

Altri esercizi

Esercizio 35. Sia data la seguente matrice 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) si determini un vettore non nullo v_1 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_1) = v_1$;
(2) si determini un vettore non nullo v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_3) = 3v_3$;
(3) per quali λ la matriche $M - \lambda \mathsf{I}$ risulta invertibile?
(4) si calcoli M^{100}.