ESERCIZI DI VARIO TIPO

Titolo nota 31/05/2016

Se A é una matrice simmetrica $\lambda_i > 0$ allora $\exists$ B simmetrica tale che $A = B^2$

$\exists M$ ortogonale tale che $M^{-1}AM =$

$$= {}^tMAM = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{\text{"}\sqrt{D}\text{"}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{I}$$

$A = MD\,{}^tM$

$$\underbrace{M \text{"}\sqrt{D}\text{"}\,{}^tM}_{B} \quad \underbrace{M \text{"}\sqrt{D}\text{"}\,{}^tM}_{B}$$

$${}^tB = {}^t(M \text{"}\sqrt{D}\text{"}\,{}^tM) =$$

$$= {}^t({}^tM)\,{}^t(\text{"}\sqrt{D}\text{"})\,{}^tM = M \text{"}\sqrt{D}\text{"}\,{}^tM$$

$$= B \Rightarrow B \text{ è simmetrica}$$

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

CAMBI DI BASE: RIPASSO

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad \{e_1, e_2\} = \mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^2$

$x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{x} = x_1e_1 + x_2e_2$

$\{e_1', e_2'\} = \mathcal{B}'$ altra base di $\mathbb{R}^2$

stesso

$\vec{x} = x_1'e_1' + x_2'e_2'$

$e_1' = 3e_1 + e_2$ $\qquad e_1 = -e_1' + e_2'$

$e_2' = 4e_1 + e_2$ $\qquad e_2 = 4e_1' - 3e_2'$

$$\vec{x} = x_1'(3e_1+e_2) + x_2'(4e_1+e_2) =$$

$$= \boxed{(3x_1'+4x_2')}\,e_1 + \boxed{(x_1'+x_2')}\,e_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

coordinate dalla Base $\mathcal{B}'$ alle coordinate di $\vec{x}$ nella base $\mathcal{B}$

$$\vec{x} = x_1(-e_1'+e_2') + x_2(4e_1'-3e_2') =$$

$$= \boxed{(-x_1+4x_2)}\,e_1' + \boxed{(x_1-3x_2)}\,e_2'$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

LA TRASPOSTA NON C'ENTRA NIENTE!

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERATORI LIN $V \to V$ — PR SCALARI $V \times V \to \mathbb{R}$

entrambi hanno un'espressione matriciale fissata $\mathcal{B}$

le loro espressioni matriciali, quando si cambia base, trasformano in modo diverso!

$\mathcal{B}$

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \vec{y} = A\vec{x} \Rightarrow \left(A_{\mathcal{B}}\right) \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

nella base $\mathcal{B}$

$*$

$$\boxed{\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}}^{*} = \begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-1&4\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}}_{I}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \overset{M^{-1}}{\begin{pmatrix}-1&4\\1&-3\end{pmatrix}}\overset{A}{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}}\overset{M}{\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} \quad *=$$

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \Big(\underset{\uparrow\, A_{B'}}{\text{contazzo}}\Big)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix}-1&4\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\9&11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31&38\\-22&-27\end{pmatrix} = A_{B'}$$

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31&38\\-22&-27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$g(\vec{x},\vec{y}) = (y_1\ y_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$ già visto

$$^t\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = {}^t\left[\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}\right]$$

$$(y_1\ y_2) = (y_1'\ y_2')\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$g(\vec{x},\vec{y}) = (y_1'\ y_2')\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}}}_{\text{contatto}}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 9 & 11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24 & 29\\ 29 & 35\end{pmatrix}$$ ovviamente diversa!

GEOM. PROIETTIVA

$\mathbb{P}^2$ $\qquad P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ coord. omogenee

(x_1, x_2, x_3) e (kx_1, kx_2, kx_3) $k \neq 0$

rappresentano lo stesso punto ("svantaggio")

Vantaggio → punti propri e "all'infinito" hanno lo stesso trattamento algebrico

Determinare l'espressione della proiettività $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tale che

(Es. 2 Prof. DADDI)

$(1, 1, -2) \longrightarrow (1, 2, -3)$

$(0, 1, 1) \longrightarrow (1, 1, 1)$

$(0, -1, 0) \longrightarrow (1, -1, 1)$

$(1, 0, 1) \longrightarrow (3, 0, 2)$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = K_p \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = K_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$9+4=13$ incognite

$4\times 3=12$ equazioni

va bene, perché la matrice è determinata a meno di un fattore.

$$\begin{cases} a+b-2c = K_1 \\ b+c = K_2 \\ -b = K_3 \\ a+c = 3K_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+e-2f = 2K_1 \\ e+f = K_2 \\ -e = -K_3 \\ d+f = 0 \end{cases}$$

$a = 3K_4 - K_3 - K_2$

$b = -K_3$

$c = K_2 + K_3$

$K_1 = -3K_2 - 4K_3 + 3K_4$

$d = -K_2 + K_3$

$e = K_3$

$f = K_2 - K_3$

$2K_1 = 4K_3 - 3K_2$

$*$ $4K_3 - 3K_2 = -6K_2 - 8K_3 + 6K_4$

$K_2 = 2K_4 - 4K_3$

$K_1 = 8K_3 - 3K_4$

$$\begin{cases} g+h-2i=-3k_1 \\ h+i=k_2 \\ -h=k_3 \\ g+i=2k_4 \end{cases}$$

$g=2k_4-k_2-k_3$

$h=-k_3$

$i=k_2+k_3$

$2k_4-k_2-k_3-k_3-2k_2-2k_3=-3k_1$

$2k_4-3k_2-4k_3=-3k_1$

$32k_3=13k_4$ ad esempio $k_3=13$, $k_4=32$

$k_1=8\cdot 13-3\cdot 32=104-96=8$

$k_2=2k_4-4k_3=64-52=12$

$k_3=13 \quad k_4=32$

$a=3k_4-k_3-k_2=96-13-12=71$

$b=-k_3=-13$

$c=k_2+k_3=25$

$d=k_3-k_2=13-12=1$

$e=k_3=13$

$f=k_2-k_3=12-13=-1$

$g=2k_4-k_2-k_3=64-12-13=39$

$h=-k_3=-13 \quad i=k_2+k_3=25$

$$\begin{pmatrix} 71 & -13 & 25 \\ 1 & 13 & -1 \\ 39 & -13 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 213 & -39 & 75 \\ 3 & 39 & -3 \\ 117 & -39 & 75 \end{pmatrix} = 3\times\begin{pmatrix} 71 & -13 & 25 \\ 1 & 13 & -1 \\ 39 & -13 & 25 \end{pmatrix}$$

VA bene lo stesso!

da 1-10 a 1-15

1.10 Costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ senza autovettori

$\rightarrow$ intanto lo cerco in $\mathbb{R}^2$ e poi "lo duplico"

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det\left(A_2 - \lambda I_{(2)}\right) = \lambda^2 + 1$$

non ci sono radici caratteristiche reali
$\Rightarrow$ non ci sono autovettori

$$A_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \det\left(A_4 - \lambda I_{(4)}\right) = \left(\lambda^2+1\right)^2$$

IDEM COME SOPRA!

1.11 $T: V \to V$ T invertibile — diciamo T la matrice associata a T

T è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ T^{-1} è diagonalizzabile

$\Rightarrow$

T diagonalizz., allora $\exists M$: $D = M^{-1}[T]M$

D ha $\det \neq 0$, quindi $\exists D^{-1}$ anch'esso diagonale

$$D^{-1} = \left(M^{-1}[T]M\right)^{-1} = M^{-1}[T]^{-1}\left(M^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= M^{-1}[T^{-1}]M \quad \text{quindi } T^{-1} \text{ è diagonalizzabile}$$

perché si vede che $M^{-1}[T]^{-1}M = D^{-1}$

$\Leftarrow$ è la stessa cosa, basta partire da $[T]^{-1}$

$$M^{-1}[T]^{-1}M = D \quad , \exists\ D^{-1} \text{ anch'esso diagonale}$$

$$D^{-1} = \left(M^{-1}[T]^{-1}M\right)^{-1} = M^{-1}\left([T]^{-1}\right)^{-1}\left(M^{-1}\right)^{-1}$$

$$= M^{-1}[T]M \Rightarrow T \text{ è diagonalizzabile}$$

1.12 A B qualsiasi! diagonalizzabili $\overset{?}{\Rightarrow}$ AB è diagonalizzabile?

<u>NO</u>

C non diagonalizzabile $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

esprimo C come prodotto di 2 matrici diagonalizzabili

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

<u>NO</u>

$$\begin{cases} ae + bg = 0 \\ af + bh = 1 \\ ce + dg = 0 \\ cf + dh = 0 \end{cases}$$

$a = 2$ $f = 1$ $b = -1$ $h = 1$

$c, d, e, g = 0$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori $2, 0$ $\quad$ $0, 1$ reali e distinti

1.13 Se $T: V \to V$ è diagonalizzabile allora $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$

Se T è diagon. allora $\exists\ \mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} \lambda_{n_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{n_1 \text{ zeri}}$

$n_1 = m.a.(0) \quad n_1 \geq 0$

$n_2 = n - n_1 =$ n° di autovalori non nulli

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{Ker}\, T} + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{Im}\, T}$$

$T(v)$ è esprimibile come comb. lin. degli autovettori con $\lambda \neq 0$

fissata la base e scelto v, gli α_i sono unici

$$v = v_K + v_{IM}$$

v_K: unico, v_{IM}: unico

1.14

$M \in M(n)$ è diagonalizzabile se e solo se ${}^tM$ è diagonalizz.

M è diagonalizz. $\Rightarrow \exists N$ tale che $N^{-1} M N = D$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = {}^tD = {}^t(N^{-1} M N) = {}^tN\ {}^tM\ {}^t(N^{-1}) =$$

$$= \underbrace{{}^tN}_{N'^{-1}} \cdot {}^tM \cdot \underbrace{({}^tN)^{-1}}_{N'} = N'^{-1}\ {}^tM\ N'$$

quindi ${}^tM$ è diagonalizzabile

${}^tM$ è diagonalizz. $\Rightarrow$ $\exists N$ tale che $N^{-1}\,{}^tM\,N = D$

$$= {}^tD = {}^t(N^{-1}\,{}^tM\,N) = {}^tN\;{}^t({}^tM)\;{}^t(N^{-1}) =$$

$$= \underbrace{{}^tN}_{N'^{-1}}\,M\,\underbrace{({}^tN)^{-1}}_{N'} = N'^{-1}\,M\,N' \Rightarrow$$

M è diagonalizzabile