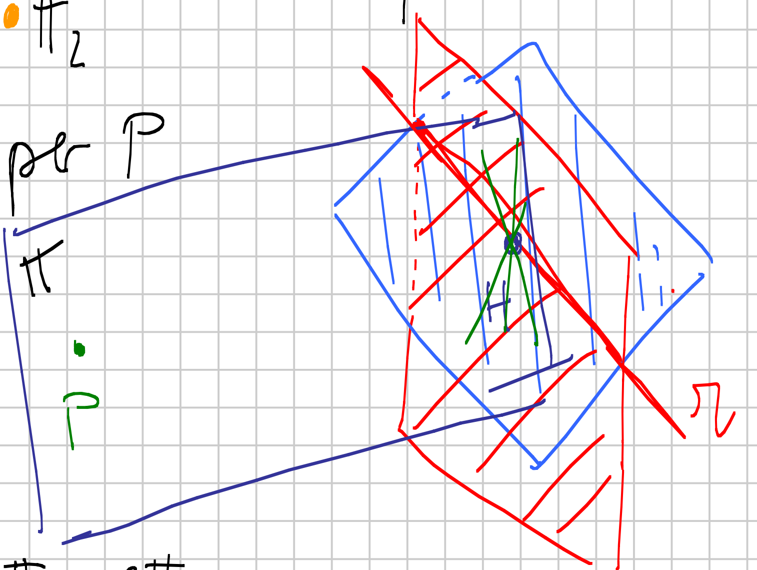
ESERCIZI DI GEOMETRIA "DRITTA"

Titolo nota 10/05/2016

12.8 p 272 $\quad P = (2, -2, 1)$

$r: \begin{cases} 2x + y + z = 1 & \pi_1 \\ 3x + y - 2z = 7 & \pi_2 \end{cases}$ trovare il piano π $\perp$ alla retta r e passante per P



I due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ottenuti prendendo i coefficienti dei piani π_1 e π_2

$r = \pi_1 \cap \pi_2$ sono una possibile giacitura di π

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ equazioni parametriche di π

$$\begin{cases} x = 2u + 3v + 2 \\ y = u + v - 2 \\ z = u - 2v + 1 \end{cases}$$

In generale le eq. parametriche di una superficie in $\mathbb{R}^3$ sono del tipo $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$

$u, v \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$v = y - u + 2$

$z = u - 2(y - u + 2) + 1$

$z = 3u - 2y - 3$

$u = \dfrac{z + 2y + 3}{3}$

$v = y + 2 - \frac{z + 2y + 3}{3} = \frac{y - z + 3}{3}$

$x = 2u + 3v + 2$ (1^a eq.)

$x = 2\left(\frac{z + 2y + 3}{3}\right) + 3\left(\frac{y - z + 3}{3}\right) + 2$

$3x = 2z + 4y + 6 + 3y - 3z + 9 + 6$

$3x - 7y + z - 21 = 0$

SECONDA SOLUZIONE

$\begin{cases} 2x + y = 1 - t \\ 3x + y = 7 + 2t \\ z = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 6 + 3t \\ 18 + 9t + y = \dots \\ z = t \end{cases}$

r in eq. parametriche

$\begin{cases} x = 3t + 6 \\ y = -7t - 11 \\ z = t \end{cases}$

la direz. di r è data da $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

π ha eq. $3x - 7y + 1 \cdot z + d = 0$

trovo d imponendo il passaggio per P

$3 \cdot (+2) - 7 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + d = 0$

$6 + 14 + 1 + d = 0 \qquad d = -21$

$3x - 7y + z - 21 = 0$ come prima

$\begin{cases} x = \frac{7u' - v' + 21}{3} \\ y = u' \\ z = v' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 7u'' - v'' + 7 \\ y = 3u'' \\ z = 3v'' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

TERZA SOLUZIONE   come faccio a trovare subito un vettore $\perp$ a π ?

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\hat{e}_1 + 7\hat{e}_2 - 1\hat{e}_3$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ è $\perp$ a π

potete prendere $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, è lo stesso !

12.10 p272 $P \equiv (0, -4, 2)$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ una delle possibili giaciture di π passante per O

trovare la retta $\perp$ a π passante per P

direz. di r è data da $w_1 \times w_2$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -5\hat{e}_1 - 29\hat{e}_2 - 23\hat{e}_3$$

$\begin{pmatrix} -5 \\ -29 \\ -23 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 5 \\ 29 \\ 23 \end{pmatrix}$

$x = 5t + 0$
$y = 29t - 4$
$z = 23t + 2$

$t = x/5$

$$\begin{cases} y = 29\frac{x}{5} - 4 \\ z = 23\frac{x}{5} + 2 \end{cases}$$ da cui

$$\begin{cases} 29x - 5y - 20 = 0 \\ 23x - 5z + 10 = 0 \end{cases}$$ eq. cartesiane

12.12 p 273

π_0 di eq. $2x - y + 4z = 5$

π_1 $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ uno delle giaciture di π_1

angolo fra i due piani si trova facendo il prodotto scalare fra due vettori ognuno dei quali è ortogonale ad uno dei due piani

$v_0 \perp \pi_0$ ad esempio $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$v_1 \perp \pi_1$ ad esempio $w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$

$6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 6\hat{e}_3$ $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_0, v_1 \rangle_E}{\|v_0\|_E \, \|v_1\|_E} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$\frac{4 - 1 + 8}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{9}} = 11/3\sqrt{21}$$

Esercizio geometria dritta

$A \equiv (1,-2,3)$ $\quad B \equiv (3,0,1)$

retta r per A e B sia in forma parametrica che le eq. cartesiane

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = -2t+3 \end{cases} \qquad t' = 2t$$

$$\begin{cases} x = t'+1 \\ y = t'-2 \\ z = -t'+3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ diret. di } r$$

$t' = x-1$

$$\begin{cases} y = x-1-2 \\ z = -x+1+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-3=0 \\ x+z-4=0 \end{cases}$$

$ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} a-2b+3c+d=0 \\ 3a+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} d = -a+2b-3c \\ d = -3a-c \end{matrix}$$

$-a+2b-3c = -3a-c$

$2b = -2a+2c$ $\qquad \begin{cases} b = c-a \\ d = -3a-c \end{cases}$

$c=0 \quad a=1 \quad b=-1 \quad d=-3$

$c=1 \quad a=0 \quad b=1 \quad d=-1$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{ seconda eq. - prima eq. delle precedenti}$$

b) Scrivere il fascio di piani contenenti r

$$\boxed{\lambda(x - y - 3) + \mu(x + z - 4) = 0}$$ oppure

$$\lambda'(x - y - 3) + \mu'(y + z - 1) = 0$$

trovare il piano del fascio che passa per $(-1, 2, 1)$

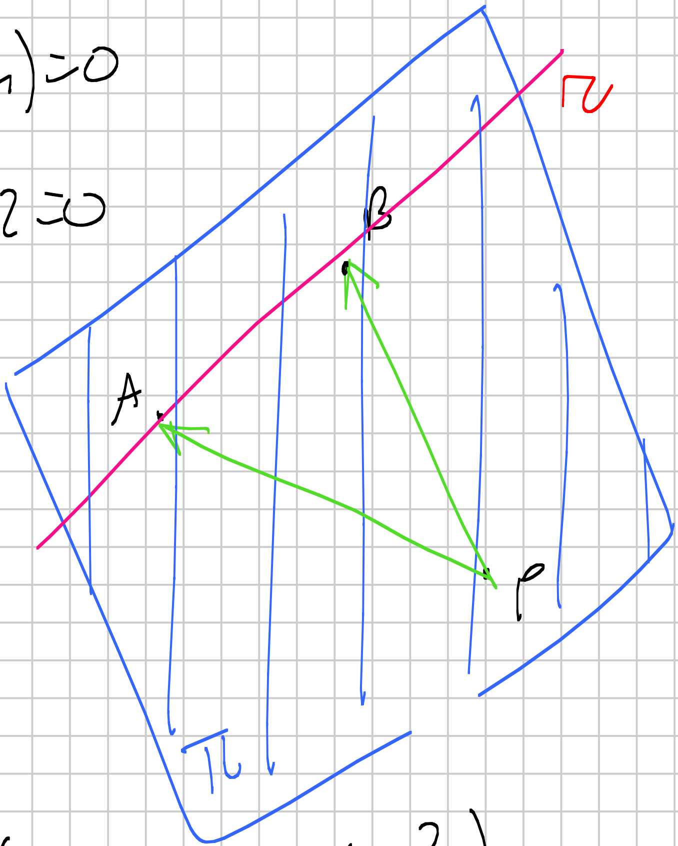
$$\lambda(-1 - 2 - 3) + \mu(-1 + 1 - 4) = 0 \Rightarrow -6\lambda - 4\mu = 0$$

$\lambda = -2$ $\mu = 3$ ad esempio

$$-2(x - y - 3) + 3(x + z - 4) = 0$$

$$-2x + 2y + 6 + 3x + 3z - 12 = 0$$

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$



$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ più semplice

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = u + 2v - 1 \\ y = -2u - v + 2 \\ z = u + 1 \end{cases}$$

$u = z - 1$

$y = -2z + 2 - v + 2$

$v = -2z - y + 4$

$x = z - 1 + 2(-2z - y + 4) - 1$

$x = z - 1 - 4z - 2y + 8 - 1$

$x = -2y - 3z + 6$

$x + 2y + 3z - 6 = 0$

TERZO METODO

$ax + by + cz + d = 0$

$A \equiv (1, -2, 3)$

$B \equiv (3, 0, 1)$

$P \equiv (-1, 2, 1)$

$$\begin{cases} a - 2b + 3c + d = 0 \\ 3a + c + d = 0 \\ -a + 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

risolvere tutto in funzione di d

$d = 1$ alla fine

c) scrivere l'eq. del fascio di piani $\perp$ a r

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirett. di r

$x + y - z + k = 0$

scrivere l'eq. del piano $\pi' \in$ fascio e passante per P

$-1 + 2 - (+1) + k = 0$

$k = 0$

$\pi' : x + y - z = 0$

d) $\pi' \cap r = H$

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -2 + t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

$$(1+t') + (-2+t') - (3-t') = 0$$

$$-4 + 3t' = 0 \qquad t' = 4/3$$

$$x_H = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \qquad y_H = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

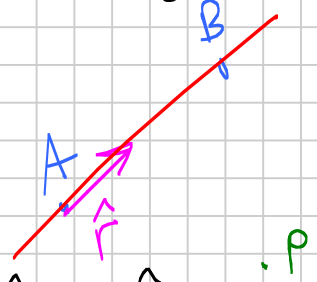
$$z_H = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \qquad H \equiv \left(\frac{7}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$d(P,r) = \overline{PH} = \sqrt{(x_H - x_P)^2 + (y_H - y_P)^2 + (z_H - z_P)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{7}{3} - (-1)\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{100 + 64 + 4} = \frac{1}{3}\sqrt{168} = \frac{2}{3}\sqrt{42}$$

$d(P,r)$

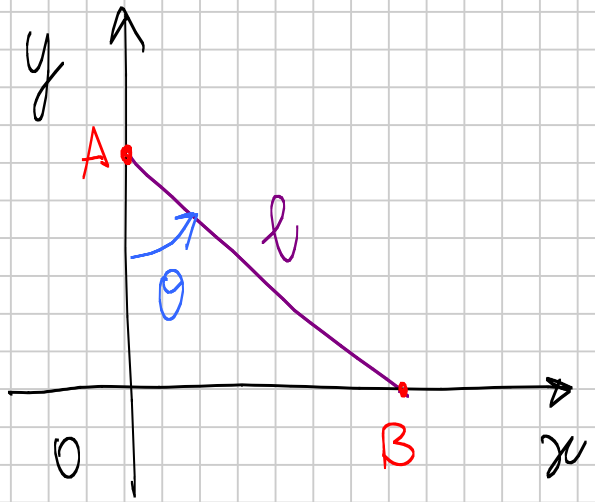


$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PA} \times \hat{r}| = \left\| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \| 2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 6\hat{e}_3 \| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4+16+36} =$$

$$= \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{14\cdot 3} = \frac{2}{3}\sqrt{42}$$



$A \equiv (0, y_A)$

$B \equiv (x_B, 0)$

$\overline{AB} = \ell$ fissata

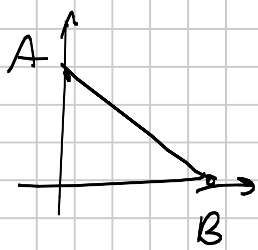
$x_B^2 + y_A^2 = \ell^2$

Posso esprimere le coordinate di A e B in funzione di θ (sui semiassi positivi)

$x_B = \ell \operatorname{sen}\theta \qquad y_A = \ell \cos\theta$

$B \equiv (\ell \operatorname{sen}\theta, 0) \qquad A \equiv (0, \ell\cos\theta)$

eq della retta per A e B ?



$$\frac{x}{x_B} + \frac{y}{y_A} = 1 \qquad \frac{x}{\ell\operatorname{sen}\theta} + \frac{y}{\ell\cos\theta} = 1$$

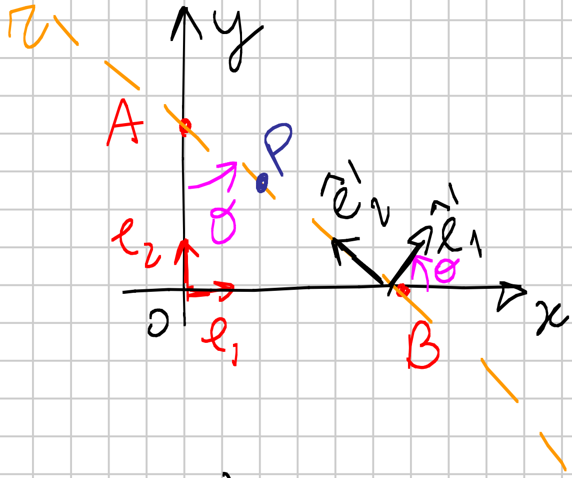
$\theta \neq 0$

$\theta \neq \pi/2$

$$\ell\cos\theta\, x + \ell\operatorname{sen}\theta\, y - \ell^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y - \ell \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0$$

$\forall\theta$ abbiamo una retta



$$\hat{e}_1' = \cos\theta\, \hat{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_2' = -\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 + \cos\theta\, \hat{e}_2$$

$$B \equiv (\ell \operatorname{sen}\theta, 0) \qquad A \equiv (0, \ell\cos\theta)$$

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \ell \operatorname{sen}\theta \cdot t \\ y &= -\ell\cos\theta\, t + \ell\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} = -\hat{e}_2'$$ mi conviene cambiare verso

$$\hat{e}_3' = e_3 \qquad \hat{e}_1' = \hat{e}_2' \wedge \hat{e}_3' = \hat{e}_2' \wedge \hat{e}_3$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\, \hat{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_2$$

$\|\overrightarrow{BP}\| = s \qquad 0 \leq s \leq \ell$ posso determinare la posizione di P nel piano Oxy $(\hat{e}_1\ \hat{e}_2)$ al variare di θ

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = (\ell \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1) + s\, \hat{e}_2' =$$

$$\left(l \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1\right) + \left(-\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 + \cos\theta\, \hat{e}_2\right) \cdot s$$

$$= (l-s) \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 + s\cos\theta\, \hat{e}_2 = \overrightarrow{OP_s}(\theta)$$

fissato s (scelto il punto P) posso dire dove si trova P man mano che il segmento di estremi A e B si sposta (al variare di θ)