ESERCIZI SU PROIETTORI

Titolo nota 19/04/2016

Compitino Mercoledì 1 giugno ore 8.30
aula F08

I° scritto FORSE Lunedì 6 giugno ore 8.30

Esercizio 2.8

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$ piano passante per l'origine

Trovare una base ortonormale per U

Trovare due terne di numeri (x_1, y_1, z_1)
(x_2, y_2, z_2)

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ \boxed{x_2 + 2y_2 + z_2 = 0} \\ \boxed{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0} \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \\ \boxed{x_2^2 + y_2^2 + z_2 = 1} \end{cases}$$

La prima la cerco "a occhio"

$x_1 = 1 \cdot \alpha \quad z_1 = 1 \cdot \alpha \to y_1 = -1 \cdot \alpha$

$\alpha^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 1$

$3\alpha^2 = 1 \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

scelgo il segno +

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \to y_2 = 0$$

$z_2 = -x_2$

$x_2 = 1 \cdot \beta \quad y_2 = 0 \quad z_2 = -1 \cdot \beta$

$\beta^2 + 0^2 + (-\beta)^2 = 1 \longrightarrow \beta = \pm 1/\sqrt{2}$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Completiamo cercando f_3 in modo da ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

(x_3, y_3, z_3)

$$\begin{cases} x_3 - y_3 + z_3 = 0 & f_3 \perp f_1 \\ x_3 - z_3 = 0 & f_3 \perp f_2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1 \end{cases}$$

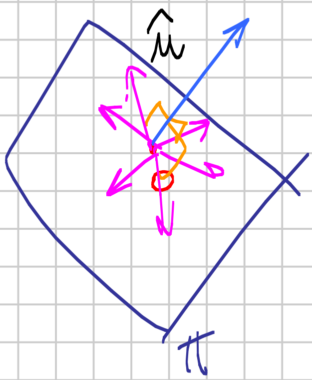
$x_3 = z_3 \qquad y_3 = x_3 + z_3 = 2z_3$

$(z_3)^2 + (2z_3)^2 + (z_3)^2 = 1 \quad = \quad 6z_3^2 = 1 \qquad z_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

è lo stesso risultato che avremmo ottenuto normalizzando il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che ha per componenti i coefficienti $a\ b\ c$ del piano $\underset{\uparrow 1}{a}x + \underset{\uparrow 2}{b}y + \underset{\uparrow 1}{c}z = 0$

$\hat{\ } =$ normalizzato



$\hat{u} = \underset{\substack{\uparrow \hat{i} \\ \text{asse } x}}{l\hat{e}_1} + \underset{\substack{\uparrow \hat{j} \\ \text{asse } y}}{m\hat{e}_2} + \underset{\substack{\uparrow \hat{k} \\ \text{asse } z}}{n\hat{e}_3}$ dato $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$n \neq \pm 1$

$$V = (nl\sin\alpha + m\cos\alpha)\underset{\hat{\imath}}{e_1} + (nm\sin\alpha - l\cos\alpha)\underset{\hat{\jmath}}{e_2} +$$
$$(n^2-1)\sin\alpha\, \underset{\hat{k}}{e_3}$$

$\langle V, \hat{u}\rangle_E = 0 \quad \forall\alpha$ Verificare!

$\hat{V} = C\,V$ $\qquad C = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-n^2}}$ se $n \neq \pm 1$

costante scalare ↗ ↑ vettore

Se $n = \pm 1$, allora certamente $l=0$, $m=0$ e la formula non si può usare

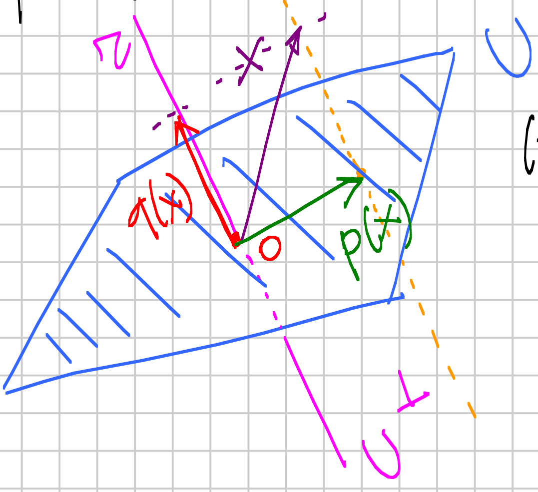
In tal caso qualunque vettore che ha componenti solo lungo e_1 o e_2 è $\perp$ a $\hat{u}$

Esercizio 2.9

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } 4x - 3y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

p operatore che proietta su U un vettore di $\mathbb{R}^3$

q operatore che proietta su $U^\perp$ un vettore di $\mathbb{R}^3$



$$X = p(X) + q(X)$$

(1) Scrivere la matrice associata a p (e anche quella a q) rispetto alla b.c. di $\mathbb{R}^3$

base per $U^\perp$ è il vettore $\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} = f_3$

$$q(x) = \langle x, f_3\rangle_E \, f_3$$

$$x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \langle x, f_3\rangle = \frac{4x-3y+z}{\sqrt{26}}$$

$$q(x) = \frac{4x-3y+z}{26}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$p(x) = x - q(x) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{4x-3y+z}{26}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\left[\begin{pmatrix}26x\\26y\\26z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}16x-12y+4z\\-12x+9y-3z\\4x-3y+z\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix}10x+12y-4z\\12x+17y+3z\\-4x+3y+25z\end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \xrightarrow{p} \frac{1}{26}\begin{pmatrix}10x+12y-4z\\12x+17y+3z\\-4x+3y+25z\end{pmatrix}$$

1^a colonna $\leftarrow x=1 \quad y=0 \quad z=0$

2^a colonna $\leftarrow x=0 \quad y=1 \quad z=0$

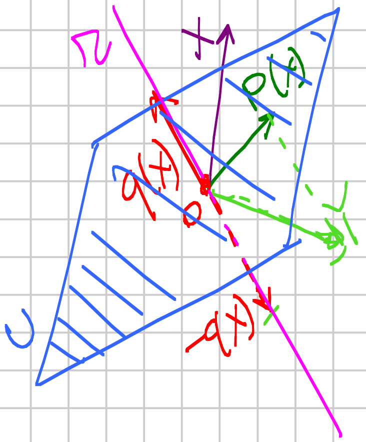
3^a colonna $\leftarrow x=0 \quad y=0 \quad z=1$

$$Q = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}16 & -12 & 4\\-12 & 9 & -3\\4 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{P} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}10 & 12 & -4\\12 & 17 & 3\\-4 & 3 & 25\end{pmatrix} \qquad \underline{P}^2 = \underline{P}, \quad Q^2 = Q$$

provate!

(2) $f(X) = p(X) - q(X)$ è diagonalizzabile?



Y è il simmetrico di X rispetto a U

L'operatore f è diagonalizzabile

un vettore diretto come la retta r

$\rightarrow \lambda_1 = -1$

2 vettori $\in$ al piano U e lin. indipendenti

$\rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = +1$

---

(3) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (simmetrica)

Determinare il s.s.v. ortogonale a U rispetto al prodotto scalare "indotto" da A

$\forall$ vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in U$ devo trovare tutti i vettori

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tali che $\underset{\text{incognito}}{\boxed{(x_2 \; y_2 \; z_2)}} \Big(A \Big) \underset{\text{generico}}{\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}} = 0$ $\in U$!

$$(x_2 \; y_2 \; z_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -4x_1 + 3y_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x_1 \, \forall y_1$$

$$(x_2 y_2 z_2) \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 + 4x_1 - 3y_1 \\ x_1 + 4y_1 - 8x_1 + 6y_1 \\ -x_1 + 2y_1 - 12x_1 + 9y_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x_1 \, \forall y_1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x_1 - 2y_1 \\ -7x_1 + 10y_1 \\ -13x_1 + 11y_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \forall x_1 \forall y_1$$

$$6x_2x_1 - 2x_2y_1 - 7y_2x_1 + 10y_2y_1 - 13z_2x_1 + 11z_2y_1 = 0$$

$\forall y_1 \forall x_1$

$$\boxed{x_1}(6x_2 - 7y_2 - 13z_2) + \boxed{y_1}(-2x_2 + 10y_2 + 11z_2) = 0$$

$\forall x_1 \forall y_2$

Una sola relazione scalare + condizione che deve annullarsi $\forall$ scelta dei valori di x_1 e y_1

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_2 - 7y_2 - 13z_2 = 0 \\ -2x_2 + 10y_2 + 11z_2 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

retta passante per l'origine

intersezione fra 2 piani passanti per l'origine (non sono coincidenti)

PIANI INCIDENTI

$$\begin{cases} 6x_2 - 7y_1 - 13z_2 = 0 \\ -6x_2 + 30y_2 + 33z_2 = 0 \end{cases}$$

$$// \quad 23y_2 + 20z_2 = 0$$

$$z_2 = -\frac{23}{20}y_2$$

$$x_2 = 5y_2 + \frac{11}{2}z_2 = 5y_2 + \frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{23}{20}\right)y_2 =$$

$$= 5y_2 - \frac{253}{40}y_2 = -\frac{53}{40}y_2$$

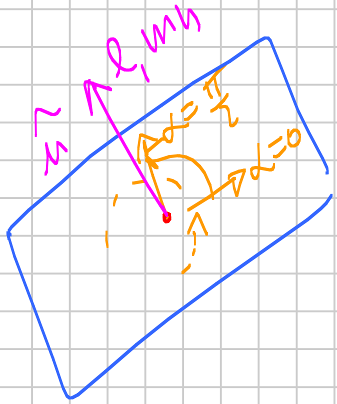
$$\left(-\frac{53}{40}y_2,\quad y_2,\quad -\frac{23}{20}y_2\right) \qquad \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-53\\ 40\\ -46\end{pmatrix}$$

$$t\begin{pmatrix}-53 & 40 & 46\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} = \dots$$

$$-5t\left(4x_1-3y_1+z_1\right)=0 \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}\in U$$

$$v=(\underset{\alpha}{\dots\dots})e_1+(\underset{\alpha}{\quad})e_2+(\dots)\operatorname{sen}\alpha\, e_3$$

$\alpha\in[0,2\pi)$ parametro



Ci sono altri modi di risolvere l'esercizio 2.9

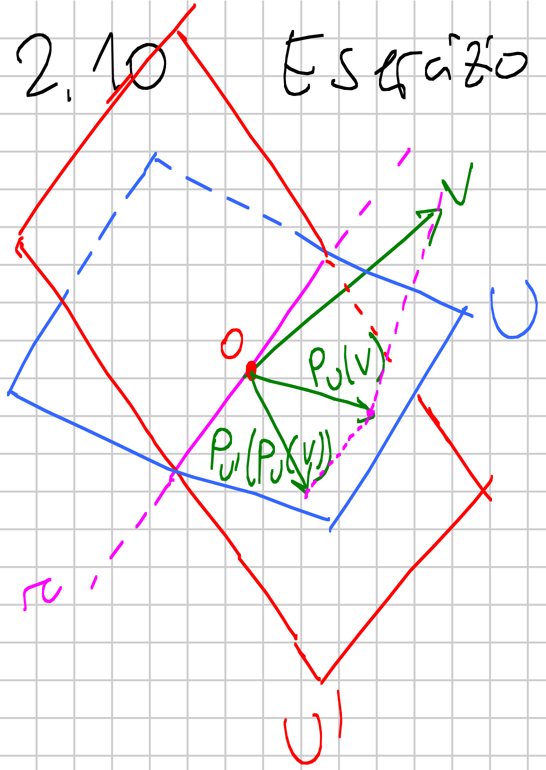
- prendere una base su U

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=f_1 \qquad \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=f_2$$

$v\in U$ è della forma $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ -4x_1+3y_1\end{pmatrix} = \underbrace{x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -4\end{pmatrix}+y_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\end{pmatrix}}_{\text{altra base di } U}$$

2.10 Esercizio molto geometrico



$$r = U \cap U'$$

$$f = P_{U'} \circ P_U$$

$$\longleftarrow$$

f ha autoval 0

autoval 1

autoval $\lambda \in [0,1]$

devo prendere un vettore v tale che

$$(P_{U'} \circ P_U)(v) = 0_{\mathbb{R}^3} = P_{U'}(\underbrace{P_U(v)}_{\text{se prendo } \uparrow = 0}) = 0$$

L'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$ è un vettore $v \perp$ al piano U in modo tale che $P_U(v) = 0$

Cosa posso fare per trovare un autovettore che ha autovalore = 1 $\qquad f(v) = v$

$$P_U(v) = v \qquad P_{U'}(v) = v \qquad r = U \cap U'$$

i punti di r $\in$ sia ad U che ad U'

se prendo un vettore v diretto come r certamente tale vettore $\in U$ quindi $P_U(v) = v$

inoltre tale vettore $\in$ anche a U' e quindi

$$\underbrace{P_{U'}(P_U(v))}_{v} = v \qquad f(v) = v$$

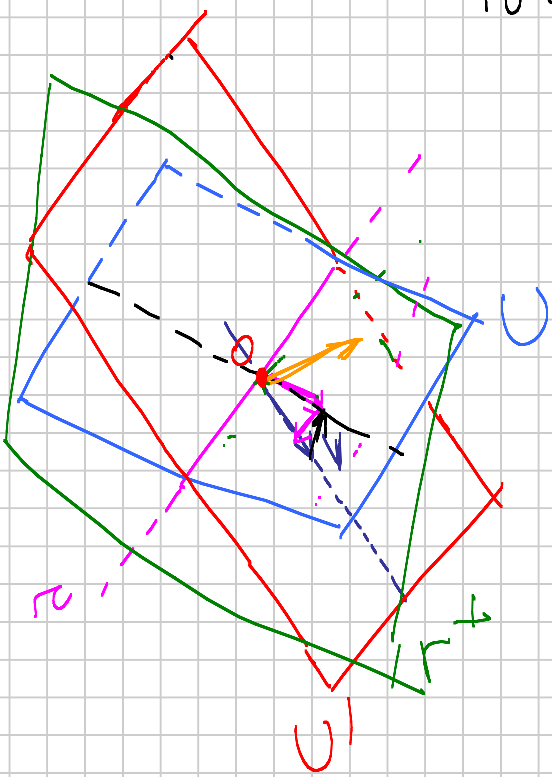
v è autovettore di f con autovalore $1 = \lambda_2$

Ora bisogna trovare un vettore corrispondente ad un autovalore $\lambda_3 \in [0, 1]$

$\exists$ un sottospazio r che contiene tutti i vettori $\perp$ alla retta in comune fra U e U'

$v \in r^\perp \qquad P_U(v) \in r^\perp$

$P_{U'}(v) \in r^\perp$



$r = U \cap U'$

$r^\perp$ è $\perp$ sia ad U che a U'

$v \in U'$

$v \in r^\perp$

$\boxed{v \in U' \cap r^\perp}$ dim = 1

$P_U(v) \in r^\perp$

$P_{U'}(P_U(v)) \in r^\perp$

$\in U'$

$\boxed{v \in U' \cap r^\perp}$

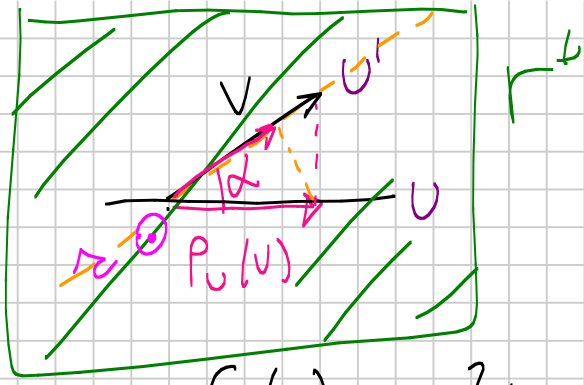
$\alpha =$ angolo fra i piani U e U'

$\|v\|$ norma iniziale

$$\|P_U(v)\| = \cos\alpha \, \|v\|$$

$$\|(P_{U'} \circ P_U)(v)\| = \cos^2\alpha \, \|v\|$$

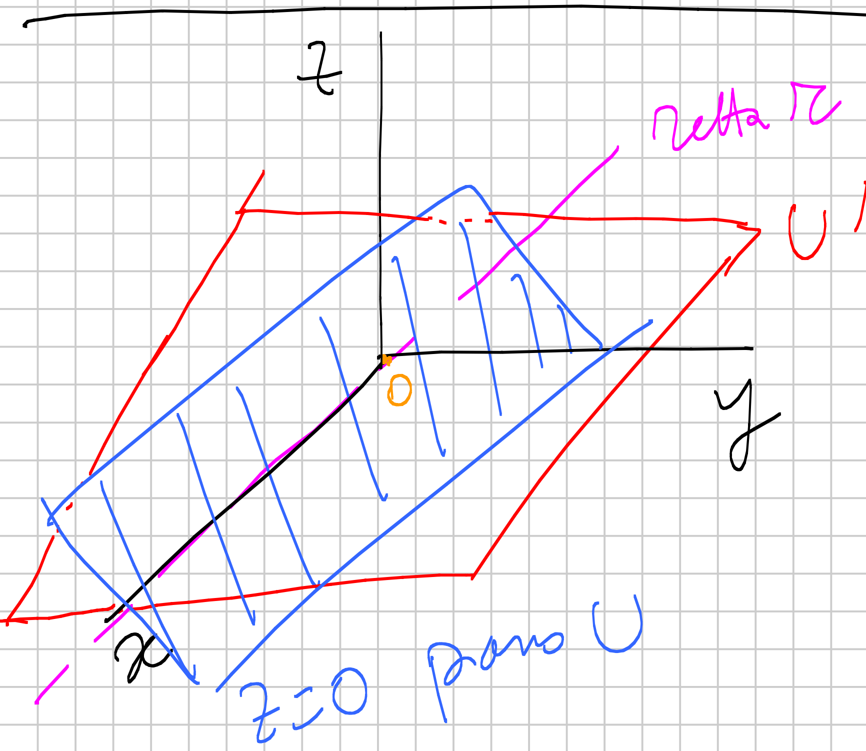
↑ autovalore



$$f(v) = \cos^2\alpha \, v$$

↗ $\in [0,1]$

$\in [0,1)$



piano di eq

$by + cz = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \to \cos^2\alpha \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2.11 g p.s. su V

① mostrare che se $g(v,v)=0$ $\forall v \in V$, allora g è banale

$g(v,w) = 0 \quad \forall \, v,w \in V$

IDEA! per definire un prodotto scalare, basta dire "cosa fa" un vettore scalar sé stesso

$$g(v+w, v+w) = g(v,v) + g(w,w) + 2g(v,w)$$

$$g(v,w)=\frac{g(v+w,v+w)-g(v,v)-g(w,w)}{2}$$

Se $g(v,v)=0\quad \forall v\in V$ $\qquad g(v,w)=\frac{0-0-0}{2}=0$

$\forall\ v,w$

② Se g é indefinito cioé $\exists\, v\in V: g(v,v)>0$

$\exists\, w\in V: g(w,w)<0$

allora esiste un vettore isotropo non banale

$u=\alpha v+\beta w$

$$g(u,u)=\alpha^2 \underbrace{g(v,v)}_{>0}+\beta^2 \underbrace{g(w,w)}_{<0}+2\alpha\beta g(v,w)$$

pongo $\beta=1$ e cerco α

$\alpha^2 g(v,v)+2\alpha g(v,w)+g(w,w)=0$ Eq. di 2° grado

$$\alpha=\frac{-g(v,w)\pm\sqrt{(g(v,w))^2-g(v,v)\cdot g(w,w)}}{g(v,v)}$$

>0

discordi per ipotesi

QUANTITA' POSITIVA

$\Delta>0$

$$u=\frac{-g(v,w)+\sqrt{\Delta}}{g(v,v)}\,v+1\cdot w$$ vettore isotropo

PER LA PROSSIMA VOLTA MARTEDÌ 26
APRILE FATE TUTTI GLI ESERCIZI
SULLA SEGNATURA