ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI

Titolo nota 05/04/2016

Es 2.1 V s.v. con p.s. g definito positivo

$g(v,v) > 0$ con $v \neq 0$ $\longrightarrow$ $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$

$$\langle v,v\rangle = g(v,v)$$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

def.

bilin.

$$\boxed{g(v+w,v+w)} = [g(v,v) + g(v,w) + g(w,v) + g(w,w)]$$

def

$$+\ \boxed{g(v-w,v-w)} = [g(v,v) - g(v,w) - g(w,v) + g(w,w)]$$

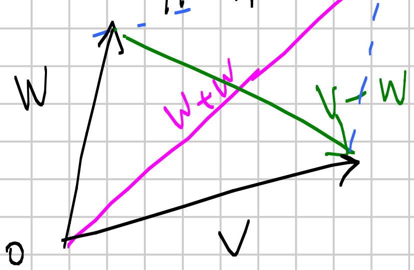
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = [g(v,v) + \cancel{g(v,w)} + \cancel{g(w,v)} + g(w,w)]$$

$$+ [g(v,v) - \cancel{g(v,w)} - \cancel{g(w,v)} + g(w,w)] =$$

$$g(v,v) + g(w,w) + g(v,v) + g(w,w) =$$

$$2g(v,v) + 2g(w,w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 =$$

$$= 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$



La somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogramma è = alla somma dei quadrati dei 4 lati

Es. 2.2 $\quad V = \mathbb{R}^2 \quad g(x,y) = {}^t x S y$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^2$

$y \in \mathbb{R}^2 \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$g(x,y) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= -x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$\mathcal{B}_0 = \{ e_1 \; e_2 \} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{f_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{f_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Scrivere la matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$S' = \begin{pmatrix} \overset{0}{g(f_1,f_1)} & \overset{-2}{g(f_1,f_2)} \\ \underset{-2}{g(f_2,f_1)} & \underset{0}{g(f_1,f_2)} \end{pmatrix}$$

$f_1 = e_1 + e_2$

$f_2 = e_1 - e_2$

$g(e_1,e_1) = -1 \qquad g(e_2,e_2) = 1 \qquad g(e_1,e_2) = g(e_2,e_1) = 0$

$$g(f_1,f_1) = g(e_1+e_2, e_1+e_2) = g(e_1,e_1) + g(e_2,e_2) +$$
$$+ g(e_2,e_1) + g(e_1,e_2) = -1 + 1 + 0 + 0 = 0 \; *$$

$$g(f_2,f_2) = g(e_1-e_2, e_1-e_2) = g(e_1,e_1) + g(e_2,e_2) - g(e_2,e_1) - g(e_1,e_2) = -1+1-0-0 = 0^*$$

$$g(f_1,f_2) = g(e_1+e_2, e_1-e_2) = g(e_1,e_1) - g(e_2,e_2) + g(e_2,e_1) - g(e_1,e_2) = -1-1+0-0 = -2^*$$

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = {}^t x\, S' y = (x_1' \ x_2') \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = (x_1' x_2') \begin{pmatrix} -2y_2' \\ -2y_1' \end{pmatrix}$$

$$= -2x_1'y_2' - 2x_2'y_1'$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \left({}^T B \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (B) \overset{?}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

Vettori isotropi $\quad g(v,v) = 0 \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ base B_0

$$g(v,v) = -v_1^2 + v_2^2 = (v_2 - v_1)(v_2+v_1) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

oppure $v_1 = -v_2$

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = V_1 \qquad \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\} = V_2$$

lo stesso calcolo lo possiamo fare nella base

$\mathcal{B}$ $\quad v = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} \qquad g(v,v) = -4 \cdot v_1' \cdot v_2' = 0$

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO $\Rightarrow v_1' = 0$ oppure $v_2' = 0$

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = V_1' \qquad \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\} = V_2'$$

VETTORE v è detto ISOTROPO se $g(v,v) = 0$
(vettori ortogonali a sé stessi).

ES. 2.3 $\quad V$ dim. finita $\quad \mathcal{B}\{e_1 \dots e_n\}$

$$g_E(x,y) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} & & \\ & I_n & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \qquad$ definito positivo

$v \qquad g(v,v)$ in generale sarà $\neq 1$

Se scelgo un particolare $v \in V$ posso

$v \neq 0 \leftarrow g_E(v,v) \neq 0$

definire un nuovo prodotto scalare $\qquad > 0$

$$g(x,y) = \frac{g_E(x,y)}{g_E(v,v)} \leftarrow \text{costante una volta che ho scelto } v$$

g è un p.s. definito positivo su V
$$g(v,v) = \frac{g_\epsilon(v,v)}{g_\epsilon(v,v)} = 1$$
1° quesito dell'esercizio 2.3

---

2 vettori $v, w \in V$ lin. indipendenti

g definito positivo tale che $g(v,w) = 0$

$\mathcal{B}' = \{v, w, f_3 \dots f_n\}$ base di V

$f_1 = v$

$f_2 = w$

$g(v,v) = 1$ $\quad g(f_i, f_i) = 1 \quad i = 3 \dots n$

$g(w,w) = 1$

$g(f_i, f_j) = 0$ se $i \neq j$

in particolare $g(v,w) = 0$

$g(w,v) = 0$

Es. 2.4

$V = M(n)$ $\quad A \in M(n)$

$B \in M(n)$ $\quad g(A,B) = tr(AB)$

mostriamo che g è un prodotto scalare

$$g(A_1 + A_2, B) = tr[(A_1 + A_2)B] = tr[A_1B + A_2B]$$
$$= tr(A_1B) + tr(A_2B) = g(A_1, B) + g(A_2, B)$$

$$g(A, B_1 + B_2) = tr[A(B_1 + B_2)] = tr[AB_1 + AB_2] =$$

$= tr(AB_1) + tr(AB_2) = g(A, B_1) + g(AB_2)$

$g(\lambda A, B) = Tr[(\lambda A)B] = Tr[\lambda(AB)] = \lambda Tr(AB)$
$= \lambda g(AB)$

$g(A, \lambda B) = Tr[A(\lambda B)] = Tr[\lambda(AB)] = \lambda Tr(AB) =$
$= \lambda g(A, B)$

$g(AB) \overset{?}{=} g(BA)$

$Tr(AB) = Tr(BA)$
per una proprietà della traccia

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} =$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right)} \quad *$$

$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kj}$

$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} =$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right)}$$

i e k sono indici muti
li posso cambiare di nome

$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n} j$

scambio i e k

$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik} \right) =$

commutatività del prodotto fra numeri

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) = *$$

commutatività delle somme finite

Es. 2.5

Spazio vettoriale dei polinomi di grado n su $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_n[x]$ $\qquad$ p, q due polinomi

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$

è un prodotto scalare

$$\langle p_1 + p_2, q \rangle = (p_1+p_2)(0) \cdot q(0) + (p_1+p_2)(1)\, q(1) + \dots$$

$$(p_1(0) + p_2(0)) \cdot q(0) + (p_1(1) + p_2(1))\, q(1) + \dots + (p_1(n) + p_2(n))\, q(n) =$$

$$p_1(0)q(0) + p_2(0)q(0) + \dots + p_1(n)q(n) + p_2(n)q(n) =$$

$$p_1(0)q(0) + p_1(1)q(1) + \dots + p_1(n)q(n) + p_2(0)q(0) + (p_2(1)q(1) + \dots + p_2(n)q(n) = \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle$$

le altre sono simili

$$\langle p, p \rangle = \underbrace{[p(0)]^2 + [p(1)]^2 + \dots + [p(n)]^2}_{} > 0$$

$p \neq 0$

n+1 addendi ciascuno dei quali è positivo o nullo (è un quadrato!)

È possibile che siano tutti nulli? NO

un polinomio di grado n al più ha n radici, non si può annullare in $n+1$ valori!

2.6 se $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ è lo spazio vettoriale su cui è definito $\langle p, q \rangle$, allora tale p.s. non è definito positivo su tale spazio

$$\bar{p} = \underbrace{x(x-1)(x-2) \cdots (x-n)}_{n+1 \text{ fattori}} \neq 0$$

$$= x^{n+1} + \dots - \; - \; -$$

$$\langle \bar{p}, \bar{p} \rangle = (\bar{p}(0))^2 + (\bar{p}(1))^2 + \dots + (\bar{p}(n))^2 =$$

$$0 + 0 + - - + 0 = 0$$

Esercizi di geometria "dritta"

$$r_1 : \begin{cases} x - ky - (k^2 + k + 2) = 0 \\ 2y + z + 2k - 2 = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x - kz + k^2 + 2k - 1 = 0 \\ y - kz + k^2 + 3k + 2 = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo se $\exists$ k_1 tale per cui $r_1 \perp r_2$ e r_1 complanare a r_2

Cerchiamo se $\exists$ k_2 : $r_1 \perp r_2$ ma r_1 e r_2 sono sghembe

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -k & \boxed{0} & -(k^2+k+2) \\ \boxed{0} & 2 & \boxed{1} & 2k-2 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & -k & k^2+2k-1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -k & k^2+3k+2 \end{pmatrix}$$

posso cercare le eq. param di r_1 ed r_2

$$r_1 : \begin{cases} x = kt + k^2 + k + 2 \\ y = t \\ z = -2t - 2k + 2 \end{cases}$$

direz. di r_1 è $\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$r_2 : \begin{cases} x = ks - k^2 - 2k + 1 \\ y = ks - k^2 - 3k - 2 \\ z = s \end{cases}$$

direz. di r_2 è $\begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = k^2 + k - 2 = 0 \quad < \begin{matrix} k = 1 \\ k = -2 \end{matrix}$$

se si vuole che $r_1 \perp r_2$

Studiamo il caso $k=1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

3^a riga $- 1^a$ riga $= 4^a$ riga

$rk(A_1) = ?$

$\det(A_1) = 0 \Rightarrow rk(A_1) < 4$

$\det \neq 0 \Rightarrow rk A_1 \geq 3$

$rk(A_1) = 3$

4 eq in 3 incognite ha 1 sola soluz.
(3 incognite e 3 eq. lin. indipendenti)

le 2 rette hanno 1 punto in comune $\rightarrow$ sono complanari

$K_1 = 1$ rette $\perp$ e complanari

Vediamo il caso $K = -2$

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3^a riga $\Rightarrow 3^a$ riga $- 1^a$ riga

$$\det(A_{-2}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & +3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1^a riga $\rightarrow 1^a$ riga $+ 2 \cdot 2^a$ riga

$$= \det \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 27 \neq 0$$

3 incognite matrice completa ha rango 4

matrice dei coefficienti ha rango 3

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni se $k=-2$

r_1 e r_2 sono sghembe

$K_1 = 1$ troviamo $P = r_1 \cap r_2$ e il piano su cui r_1 ed r_2 giacciono

$$r_1: \begin{cases} x = t+4 \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad r_2: \begin{cases} x = s-2 \\ y = s-6 \\ z = s \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

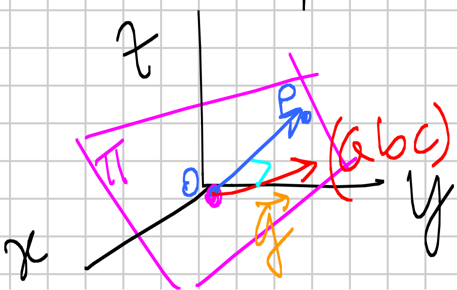
$\rightarrow P \equiv (2,-2,4)$

$$\begin{cases} t+4 = s-2 \quad \checkmark \quad -2+4 = 4-2 \text{ ok} \\ t = s-6 \\ -2t = s \qquad -2s+12 = s \end{cases}$$

$t=-2$

$\boxed{s=4}$

$\pi: \; ax+by+cz=0$ il vettore $(a\ b\ c)$ è $\perp$ a qualunque vettore che ha origine in O e "punta" in un punto di π



$\vec{OP}$ il vettore che ha componenti $(x \ y \ z)$
$\vec{g}$ il vettore che ha componenti $(a \ b \ c)$

$ax+by+cz=0 \Rightarrow$ prodotto scalare euclideo fra il vettore $\vec{OP}$ e il vettore $\vec{g}$

$(1 \quad 1 \quad -2)$ direz. di r_1

$(1 \quad 2 \quad 1)$ direz. di r_2

$(a \quad b \quad c)$ deve essere $\perp$ ad entrambi

$$(a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a+b-2c=0$$

$$(a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\begin{cases}a+b-2c=0\\a+b+c=0\end{cases} \rightarrow c=0 \quad a=-b$$

$$a=1 \quad b=-1$$

piano su cui stanno r_1 ed r_2 ha la forma

$x - y + d = 0$ adesso trovo d imponendo che il piano passi per $P \equiv (2, -2, 4)$

$2 - (-2) + d = 0$ $d = -4$ $x - y - 4 = 0$

fasao