USO DEL POLINOMIO MINIMO / CARATTERISTICO

Titolo nota 22/03/2016

È dato un operatore T nilpotente $(\exists r : T^r = 0)$ ← operatore nullo

$T: V \to V$ $\dim(V) = n$

T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow T = 0$

$\Leftarrow$ banale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ \vdots & \vdots & - & \vdots \\ 0 & 0 & - & 0 \end{pmatrix}$$ è diagonale

tutto 0 / tutto 0

$\Rightarrow$ $T^r = 0$ $\lambda^r = 0$ $\lambda = 0$ è l'unico autovalore

$m_a(0) = n$, occorre quindi che $m_g(0) = n$

$V_0 = Ker(T)$ $\dim(Ker(T)) = n$

$\dim(Im(T)) = 0$ ← numero $Im(T) = \{0_V\}$ ← vettore

T manda tutti i vettori in 0_V e quindi T è l'operatore nullo

Trovare un operatore nilpotente non diagonalizzabile

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T^2 = 0$ ← operatore nullo

$r = 2$

$\dim(Ker(T)) = 1$

$\dim(Im(T)) = 1$

PROIETTORE

Se $T^2 = T$ allora T è diagonalizzabile

$T^2 = T \Rightarrow T^2 - T = 0$ $\quad \lambda^2 - \lambda = 0$ $\quad \lambda = 0$, $\lambda = 1$ autovalori

$T: V \to V$

$v \in V$ $\quad \boxed{v = v_0 + v_1}$ $\quad v_0 \in V_0 = \mathrm{Ker}(T)$

in questo caso

$v_1 \in V_1 = \mathrm{Im}(T)$

$$v = v - T(v) + T(v)$$
$$= \underbrace{\boxed{(v - T(v))}}_{\in V_0} + \underbrace{\boxed{T(v)}}_{\in V_1}$$

$V_0 \cap V_1 = \{0_V\}$

autovalori diversi fra loro

$v_0 = v - T(v)$

T è proiettore $T^2 = T$

LINEARITÀ di T

$$T(v_0) = T(v - T(v)) \overset{\text{LINEARITÀ di } T}{=} T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) =$$
$$= 0_V \Rightarrow v_0 \in \mathrm{Ker}(T) \quad \forall v \in V$$

$v_1 = T(v) \Rightarrow v_1 \in \mathrm{Im}(T)$, basta usare la definizione di Im

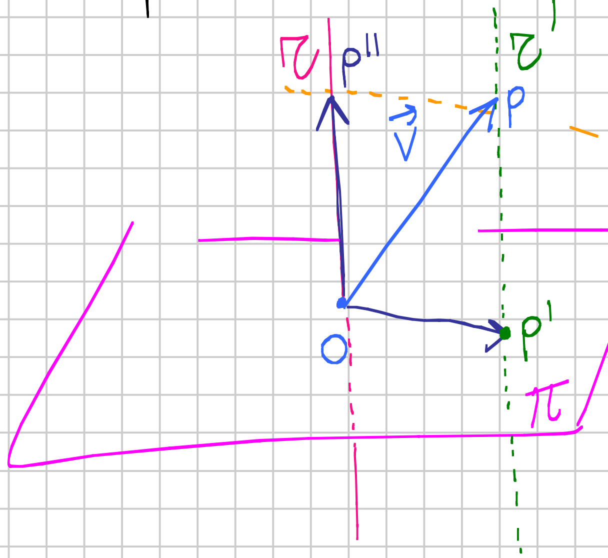
$$\mathrm{Im}(T) = \{ \underset{\uparrow v_1}{u} \in V : \exists \underset{\uparrow v}{w} \in V,\ u = T(w) \}$$

$V = V_0 \oplus V_1$ $\quad V_0 \cup V_1 = V$

$V_0 \cap V_1 = \{0_V\}$

Posso scrivere qualunque elemento di V come somma di 2 vettori che appartengono a due sottospazi che hanno in comune solo lo $\{0_V\}$

Visualizzaz. grafica in un caso particolare, ma importante $V=\mathbb{R}^3$ π = piano passante per O



r = retta per O $\perp$ a π

r' = retta $\parallel$ a r passante per P

$P' = r' \cap \pi$

$\vec{v} = \vec{OP'} + \vec{OP''}$ $\qquad$ $\vec{OP'}$ è il risultato dell'operazione di proiezione di v su π

$\vec{OP'} = T(v)$ $\qquad$ $\underset{v_0}{\vec{OP''}} \in Ker(T)$ $\qquad$ $\underset{v_1}{\vec{OP'}} \in Im(T)$

$T: V \to V$ $\qquad$ $T^2 = id$ $\qquad$ $T^2 - I = 0$ $\qquad$ $\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = +1$ $\qquad$ $\lambda = -1$ $\qquad$ $V = V_1 \oplus V_{-1}$

$$v = \frac{v}{2} + \frac{v}{2} = \frac{v}{2} + \frac{T(v)}{2} + \frac{v}{2} - \frac{T(v)}{2}$$

$$= \frac{v+T(v)}{2} + \frac{v-T(v)}{2}$$

$$T\Big(\underbrace{\frac{v+T(v)}{2}}_{v_1}\Big) = \frac{1}{2}T(v+T(v)) = \frac{1}{2}T(v) + \frac{1}{2}T(T(v)) =$$

$$= \frac{1}{2}T(v) + \frac{1}{2}v = \underbrace{\frac{v+T(v)}{2}}_{v_1}$$

$T(v_1) = v_1$

v_1 è autovettore di T corrispondente a $\lambda = 1$

$$T\left(\underbrace{\frac{v - T(v)}{2}}_{v_{-1}}\right) = \frac{1}{2} T(v - T(v)) = \frac{T(v)}{2} - \frac{1}{2} T(T(v)) =$$

$T^2 = I_d$

$$= \frac{T(v)}{2} - \frac{v}{2} = -\left(\underbrace{\frac{v - T(v)}{2}}_{v_{-1}}\right)$$

$$T(v_{-1}) = -v_{-1}$$

v_{-1} è autovettore di T corrispondente a $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ abbiamo un'espressione che consente di scrivere v come somma di 2 vettori appartenenti ai 2 autospazi relativi ai 2 autovalori

$$Im(V) = V_1 \oplus V_{-1}$$

base di autovettori in V_1

base di autovettori in V_{-1}

unite le basi e ottenete una base di V formata da autovettori di T

Prendiamo una matrice e calcoliamone il polinomio minimo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$T : V \to V$

$$(-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots a_1 t + a_0$$

T^n $\quad T^{n-1}$ $\quad T^{n-2}$ $\quad I_d$

$$U = (-1)^n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots \quad a_1 T + a_0 \, id$$

$U : V \to V \qquad v \in V \qquad B = \{e_1 \dots e_n\}$

$U(v) \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

U è un'operatore lineare

il caso interessante è quando $U \equiv 0$

$$U(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot U(e_i)$$

$U(v) = 0_V \quad \forall v \in V \qquad \forall i = 1 \dots n \quad U(e_i) = 0$

$$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underbrace{\underset{A(e_1)}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{A^2(e_1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{A^3(e_1)}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

I primi 3 sono lin. indip $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

I 4 vettori, ovviamente, non lo sono

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(*)$ $A(e_1) + 2A^2(e_1) + A^3(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$

$$A^3(e_1) + 2A^2(e_1) + A(e_1) - 2e_1 = 0_V$$

$t^3 + 2t^2 + t - 2 \qquad$ usando e_1

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{e_2 \quad A(e_2) \quad A^2(e_2)}_{\text{lin. indip}} \quad A^3(e_2)$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

$$A^3(e_2) + 2A^2(e_2) + A(e_2) - 2e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

In tutti e 3 i casi otteniamo

$\mu_{e_1,A}(t) = \mu_{e_2,A}(t) = \mu_{e_3,A}(t) \rightarrow$

il polinomio minimo è uno qualunque di questi tre

$t^3 + 2t^2 + t - 2$

$-t^3 - 2t^2 - t + 2 = q_A(t) = p_A(t)$

Se non otteniamo 3 polinomi uguali, si fa il m.c.m. fra i 3 polinomi

A è diagonalizzabile?

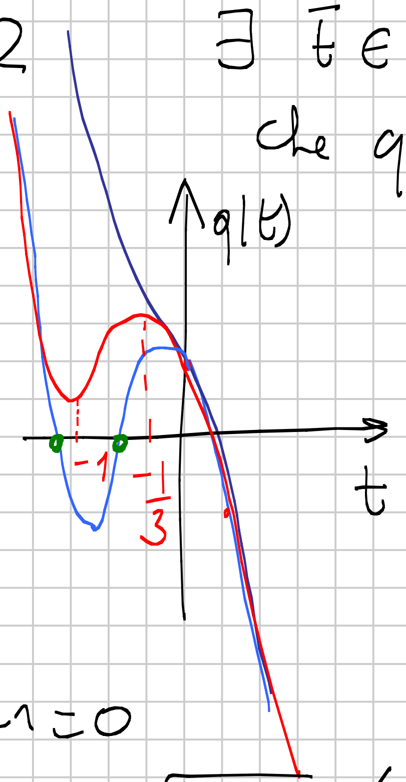
Certamente c'è un autovalore (radice caratteristica reale) perché il polinomio è di grado dispari

$q(0) = 2 \qquad q(1) = -2 \qquad \exists\ \bar{t} \in (0,1)$ tale che $q(\bar{t}) = 0 \qquad \bar{t} = \lambda_1$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$

Ci sono altre radici caratteristiche reali?

Come si fa a decidere?



$$q'(t) = -3t^2 - 4t - 1$$

$$q'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} \left< \begin{matrix} -1/3 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$q(-1) = -(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 1 - 2 + 1 + 2 = 2 > 0$$

$$q\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{1-6+9+54}{27} > 0$$

Siamo nel caso rosso e A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

In questo caso bisogna fare il minimo comune multiplo

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{A(e_1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad -e_1 + A(e_1) = 0_V$$

$$t - 1 = \mu_{e_1,A}(t)$$

$$\underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{A(e_2)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad A(e_2) - 2e_2 = 0_V$$

$$t - 2 = \mu_{e_2,A}(t)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ e_3 & A(e_3) \end{array} \qquad A(e_3) - 3e_3 = 0_V$$

$$t-3 = \mu_{e_3,A}(t)$$

Stavolta si sono ottenuti 3 polinomi diversi e si fa il m.c.m. che in questo caso è il prodotto dei 3 $\quad (t-1)(t-2)(t-3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} e_1 & A(e_1) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mu_{e_1,A}(t) = (t-1)$$

$$\begin{array}{ccc} e_2 & A(e_2) & A^2(e_2) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^2(e_2) - 3A(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2e_2$$

$$A^2(e_2) - 3A(e_2) + 2e_2 = 0_V$$

$$t^2 - 3t + 2 = \mu_{e_2,A}(t) \qquad (t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)$$

$$\begin{array}{cc} e_3 & A(e_3) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mu_{e_3,A}(t) = t-1$$

$q(t) = (t-1)(t-2)$ ha grado minore di 3

Calcolo delle potenze di T

$T \qquad T^2 = T - I$

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$ rotaz. di $60°$ $\quad T^2 - T + I = 0$

$T^3 = -I \qquad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$T^3 \qquad T^6 \qquad T^6 = I$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T - I = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = T \circ T^2 = T \circ (T - I) = T^2 - T \qquad \cancel{T} - I - \cancel{T} = -I$$

$$T^6 = T^3 \circ T^3 = I$$

$$T^6 = T^2 \circ T^2 \circ T^2 = T^2 \circ (T - I) \circ (T - I) =$$

$$= T^2 \circ (T^2 - 2T + I) = T^2 \circ (T - \cancel{I} - 2T + \cancel{I}) = -T^2 \circ T$$

$$= -(T - I) \circ T = -T^2 + T = \cancel{-T} + I + \cancel{T} = I$$

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Unico autovalore è $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore con $\lambda = 1$

$A^3 = I \qquad t^3 - 1$ è il polinomio minimo che coincide col caratteristico

2 fasci di piani:

$\pi_1(k)$: $kx - y - kz + 1 = 0$

$\pi_2(k)$ $8x - 2ky - 8z + 5k + 6 = 0$

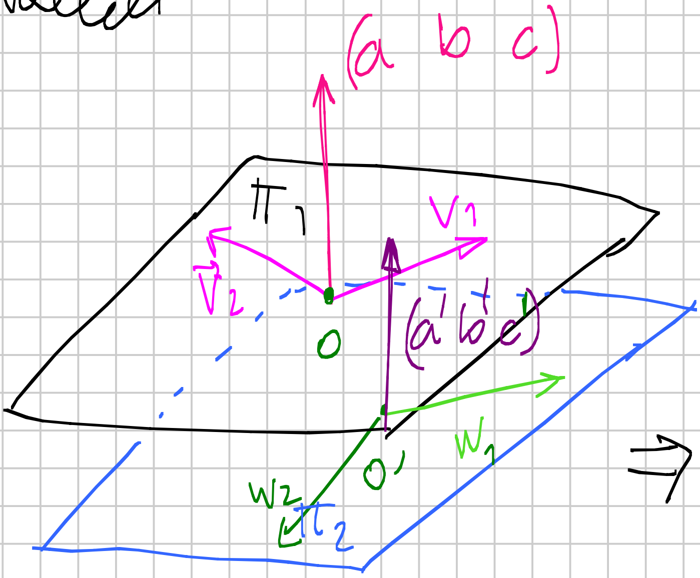
a) Dire se $\exists$ valori di k per i quali i 2 piani π_1 e π_2 sono paralleli non coincidenti

$ax + by + cz + d = 0$

$a'x + b'y + c'z + d = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \\ rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \end{array}}$$

2 piani paralleli



a b c e a' b' c' devono essere paralleli fra loro

$\Rightarrow \exists \mu$ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

i 2 vettori sono lin. indipendenti e quindi

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

$$rk\begin{pmatrix} k & -1 & -k \\ 8 & -2k & -8 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{cases} \det\begin{pmatrix} k & -1 \\ 8 & -2k \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} -1 & -k \\ -2k & -8 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$\det\begin{pmatrix} k & -k \\ 8 & -8 \end{pmatrix} = 0$ ovvio

$$\begin{cases} -2k^2+8=0 \\ 8-2k^2=0 \end{cases} \qquad k=\pm 2$$

per $k=+2$ oppure $k=-2$ i 2 vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sono paralleli fra di loro

paralleli e distinti

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

(se fosse $=1$ avrei 2 piani coincidenti)

$$\begin{pmatrix} \cancel{k} & -1 & -k & 1 \\ \cancel{8} & -2k & -8 & 5k+6 \end{pmatrix}$$

$k=-2 \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ +4 & -8 & -4 \end{pmatrix} = 1$ $\quad k=-2$ non va bene

$k=2 \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 16 \end{pmatrix} = 2$ perché

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\pi_1 : 2x - y - 2z + 1 = 0$

$\pi_2 : 8x - 4y - 8z + 16 = 0$

$2x - y - 2z + 4 = 0$

posso scrivere l'eq. di una retta $\perp$ ad entrambi i piani

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -t & \perp \pi_1 \\ z = -2t & \perp \pi_2 \end{cases}$$

Posso calcolare la distanza fra π_1 e π_2?

$P_1 = r \cap \pi_1$

$P_2 = r \cap \pi_2$

$d(\pi_1, \pi_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}|$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x = 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$$

$4t_1 + t_1 + 4t_1 + 1 = 0$

$t_1 = -1/9$

$P_1 \equiv \left(-\frac{2}{9}, +\frac{1}{9}, +\frac{2}{9}\right)$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 4 = 0 \\ x = 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$$

$4t_2 + t_2 + 4t_2 + 4 = 0$

$t_2 = -4/9$

$P_2 \equiv \left(-\frac{8}{9} \; +\frac{4}{9} \; +\frac{8}{9}\right)$

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{9}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$