ESERCIZI SU DIAGONALIZZ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$
$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$K = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$\uparrow$ somma dei minori principali

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad K = (ae - bd) + (ei - fh) + (ai - cg)$$

$\downarrow$

$$traccia = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$\det(A) = 0$$
$$K = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si vede a occhio!

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$1C \to 1C - 2C$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{2R \to 1R + 2R}$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda - 4 + 4\right)$$
$$= -\lambda^3$$

$$m_a(0) = 3$$

$$m_g(0) = 3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq m_a(0)$$

A non è diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$$

$$m_a(a) = 3 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$m_g(a) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalizzabile se e solo se $b=0$ e $c=0$ e $d=0$

Se almeno uno fra b, c, d è $\neq 0$, A non è diagonalizzabile

---

$$A = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ 1 & K & 1 \\ 0 & -K & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & K & 0 \\ 1 & K-\lambda & 1 \\ 0 & -K & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1 & K-\lambda & 1 \\ 0 & -K & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{3C = 3C - 1C}{=} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & K-\lambda & 0 \\ 0 & -K & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{1R \to 1R + 3R}{=}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(K-\lambda) \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = K$$

Se $K \neq 1$ $\quad m_a(1) = 2$ $\qquad m_g(1) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 1 & K-1 & 1 \\ 0 & -K & 0 \end{pmatrix}$ $\quad K$

A è diagonalizzabile

$\boxed{\text{Se } K = 0, \ m_a(1) = m_g(1) = 2}$

$$= \begin{cases} 3-2 & \text{se } K \neq 0 \\ 3-1 & \text{se } K = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Se } K \neq 0 \text{ e } K \neq 1 \quad m_a(1) = 2 \quad m_g(1) = 1}$ A non è diagonalizz.

$\boxed{K = 1 \quad m_a(1) = 3 \quad m_g(1) = 3 - car\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \quad \text{A non è diagonalizzabile}}$

A non diagonalizz.

Troviamo una base di autovett. per $K = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 0$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore corrisp. a $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0\\1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0\\0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}x = x\\x+z = y\\z = z\end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad z_1 = 1 \quad y_1 = 1$

$x_2 = 1 \quad z_2 = 0 \quad y_2 = 1$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sono 2 autovettori linearmente indip. entrambi relativi a $\lambda = 1$

$$\text{rk}\begin{pmatrix}0&1\\ \boxed{\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}}\end{pmatrix} = 2$$

$\det = -1$

$$A = \begin{pmatrix}1&0&3\\K&+1&-1\\-18&K&2\end{pmatrix}$$

$\exists$ un valore di K per il quale $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ è autovettore di A? se sì, con quale autovalore? Per tale valore di K, A è diagonalizz.?

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\K&1&-1\\-18&K&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 3 = \lambda\cdot 1\\1\cdot K+2\cdot 1+3(-1) = \lambda\cdot 2\\-18\cdot 1+2\cdot K+3\cdot 2 = \lambda\cdot 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda = 10\\K-1 = 2\lambda\\-18+48 = 3\cdot 10 \quad \text{OK}\end{cases} \qquad K = 21$$

per $\lambda = 10$, $K = 21$ $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ è autovett. con $\lambda = 10$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{3} \\ 21 & 1 & -1 \\ \boxed{-18} & 21 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 10 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\lambda_1\lambda_2 + 10\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 10 = 1 + 23 + 56 = 80$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -6 \\ \lambda_1\lambda_2 = 80 - 10\cdot(\lambda_1+\lambda_2) = 140 \end{cases}$$

$$t^2 + 6t + 140 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = s \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = p \end{cases}$$

$$t^2 - st + p = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - tr(A) + \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \qquad \lambda_1 \in \mathbb{C}, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\ &\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{pmatrix} = \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$(a-\lambda)\left[(e-\lambda)(i-\lambda) - fh\right]$$

$$-b\left[d(i-\lambda) - fg\right] + c\left[dh - g(e-\lambda)\right] =$$

$= (a-\lambda)\left[+\lambda^2 - i\lambda - e\lambda + ei - fh\right] - bdi + bd\lambda + bfg$
$+ cdh - ceg + cg\lambda =$

$= a\lambda^2 - ai\lambda - ae\lambda + aei - afh - \lambda^3 + i\lambda^2 + e\lambda^2$
$- ei\lambda + fh\lambda + bd\lambda + cg\lambda - bdi + bfg + cdh$
$- ceg =$

$$-\lambda^3 + \lambda^2\underbrace{(a+e+i)}_{tr(A)} + \lambda\left[(bd-ae)+(fh-ei)+(cg-ai)\right]$$
$$+ \det(A)$$

$n = 3$

$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$ $\qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$

$$-\lambda^3 + \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{tr(A)}\lambda^2 - \underbrace{(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)}_{K}\lambda + \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\det A}$$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3 = \left[\underbrace{(ae-bd)}_{\det(A_{33})} + \underbrace{(ei-fh)}_{\det(A_{11})} + \underbrace{(ai-cg)}_{\det(A_{22})}\right]$$

$A \qquad A_{11}$ = matrice ottenuta da A togliendo la 1^a riga e la 1^a colonna

---

$T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ scelta $\mathcal{B}$ base $\qquad [T_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_k$

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 3k-4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3k-1 & 3k-1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 3k+4$$

$$\det(A_k-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 3k-4 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 3k-1 & 3k-1-\lambda\end{pmatrix}\underset{\substack{2C\to 2C\\ -3C}}{=}$$

$$=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 3k-4 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ -1 & \lambda & 3k-1-\lambda\end{pmatrix}\underset{3R\to 2R+3R}{=}\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 3k-4 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 3k-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(3k-\lambda)\left[\lambda^2-4\lambda-3k+4\right]=0 \qquad \lambda_1=3k$$

$$\lambda^2-4\lambda-3k+4=0 \qquad \lambda_{2,3}=2\pm\sqrt{\cancel{4}+3k-\cancel{4}}\ \begin{cases}2-\sqrt{3k}\\ 2+\sqrt{3k}\end{cases}$$

$\lambda_1=3k$

$\lambda_2=2+\sqrt{3k}$

$\lambda_3=2-\sqrt{3k}$

Se $k<0$ 2 delle 3 soluzioni non sono reali $\to$ no diagonalizzabilità

Se $k\geq 0$ bisogna vedere quando accade che 2 autov. sono uguali

$k=0 \qquad \lambda_1=0 \qquad \boxed{\lambda_2=\lambda_3=2} \qquad m_a(2)=2$

$$m_g(2)=3-rk\begin{pmatrix}4-2 & -4 & 0\\ 1 & 1-2 & 1\\ -1 & 3\cdot 0-1 & 3\cdot 0-1-2\end{pmatrix}=$$

$$3-rk\begin{pmatrix}2 & \overbrace{-4 \quad 0}^{\det=-4}\\ 1 & -1 \quad 1\\ -1 & -1 \quad -3\end{pmatrix}=3-2=1\neq m_a(2)$$

Può capitare $\lambda_1=\lambda_2$? $\qquad 3k=2+\sqrt{3k}$

$$\sqrt{3k}=3k-2 \qquad \begin{cases}k\geq 2/3\\ 3k=9k^2-12k+4\end{cases} \qquad \begin{cases}k\geq 2/3\\ 9k^2-15k+4=0\end{cases}$$

$$k = \frac{15 \pm \sqrt{225-144}}{18} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{18} = \frac{15 \pm 9}{18} \begin{cases} 4/3 \text{ acc} \\ \frac{1}{3} \text{ non acc.} \end{cases}$$

Per $k = 4/3$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 0$

$m_a(4) = 2 \qquad m_g(4) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$

Per $k = \frac{4}{3}$ $\quad m_a(4) = m_g(4) = 2$

$A_{\frac{4}{3}}$ è diagonalizzabile

Può capitare $\lambda_1 = \lambda_3$?

$3k = 2 - \sqrt{3k} \qquad \sqrt{3k} = 2 - 3k \qquad \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 2/3 \\ 3k = 4 + 9k^2 - 12k \end{cases}$

$\begin{cases} k \leq 2/3 \\ 9k^2 - 15k + 4 = 0 \end{cases} \qquad k = \frac{15 \pm \sqrt{225-144}}{18} \begin{cases} 4/3 \text{ non acc} \\ \frac{1}{3} \text{ acc.} \end{cases}$

per $k = \frac{1}{3}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_3 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

$m_a(1) = 2 \qquad m_g(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

non diagonalizzabile

A_k è diagonalizz. per $k > 0$ e $k \neq \frac{1}{3}$

Ripassino di geometria piana

Prendiamo una retta r nel piano

$$r: \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$ punto fissato

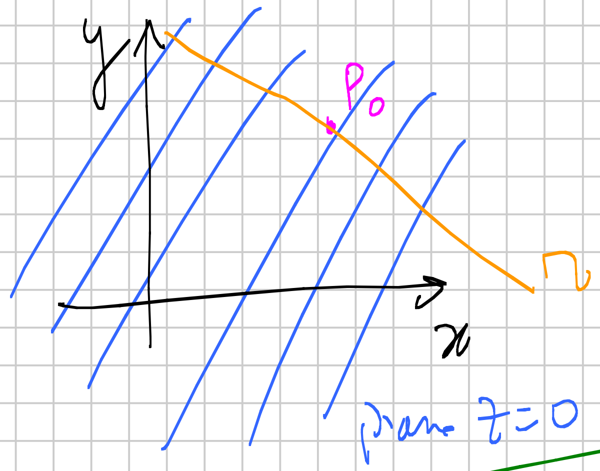
$(l \quad m)$ direz. fissata

$t \in \mathbb{R}$ = parametro

fascio di piani che "passano per r"

($r \subset$ ad ogni piano del fascio)

$z=0$ è un piano che contiene la retta r



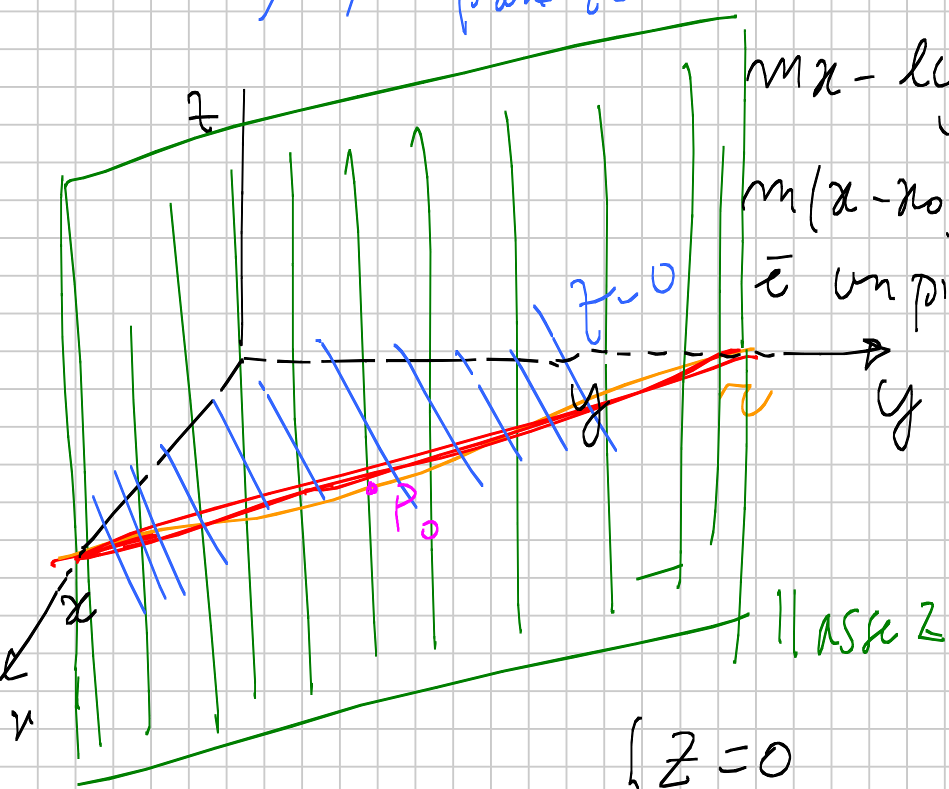
$$\begin{cases} mx = \cancel{mlt} + mx_0 \\ ly = \cancel{lmt} + ly_0 \end{cases}$$

$$mx - ly = mx_0 - ly_0$$

$$mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0$$

$$m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$$

è un piano?



$m = l = 1$

$P_0 \equiv (3, 1)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 \end{cases}$$

Comb. lineare

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y - 3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$$

$$\lambda \cdot z + \mu(x-y-2) = 0$$

$\forall (\lambda, \mu) \neq (0,0)$ l'espressione scritta sopra è un piano $\pi_{\mu,\lambda}$

$$\mu x - \mu y + \lambda z - 2\mu = 0$$

Mostriamo che tutti i punti di $r \in \pi_{\mu\lambda}$ per ogni scelta di μ e λ

$$x = t+3$$
$$y = t+1$$
$$z = 0$$

$$\mu(t+3) - \mu(t+1) + \lambda \cdot 0 - 2\mu =$$

$$\cancel{\mu t} + 3\mu - \cancel{\mu t} - \mu + 0 - 2\mu = 3\mu - \mu - 2\mu = 0$$

$\forall \lambda, \mu$

$\mu = 3 \quad \lambda = 4 \rightarrow 3x - 3y + 4z - 6 = 0$

questo piano contiene r

Scegliamo il piano del fascio che passa per $(2, 4, 3)$ $\exists$? è unico?

$$\mu x - \mu y + \lambda z - 2\mu = 0$$

$$\cancel{2\mu} - 4\mu + 3\lambda \cancel{-2\mu} = 0 \qquad 3\lambda = 4\mu$$

$\lambda = 4 \quad \mu = +3$

$\lambda = 2 \quad \mu = 3/2$

posso sceglierli (quasi) come voglio (devo escludere $0,0$)

$3x - 3y + 4z - 6 = 0$ è il piano del fascio che passa per $(2, 4, 3)$

$6 - 12 + 12 - 6 = 0$ OK!