ESERCITAZ DÌ GEOMETRIA E ALG-LIN

Titolo nota 08/03/2016

MICHELE BARSANTI m.barsanti@ing.unipi.it

"NON DÌAGONALIZZ." DÌ UNA 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_{(2)}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 \cdot 0 = (2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ autovalore con molteplicità algebrica $= 2$ (abbiamo 2 volte lo stesso autov.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 1 \cdot y = 2x \\ 0x + 2 \cdot y = 2 \cdot y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases} \quad x \text{ qualsiasi}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

↖ è un autovettore di A con autovalore $= 2$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 0 \\ \alpha \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Devo trovare 2 vettori linearmente indip.
Ce la faccio? <u>NO</u>

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dip. $\forall$ scelta di α_1 e α_2

A non è diagonalizzabile

ALTRO CASO DI MATRICE NON DIAG

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\quad \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

2 radici del polinomio caratteristico che sono diverse fra di loro, ma non sono reali $\rightarrow$ se voglio la diagonalizzabilità in campo reale ($\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$) non posso fare niente, perché NON HO AUTOVALORI

Se invece decido di considerare $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{C}$ allora posso diagonalizzare

p. 55 Conti / DADDI / SAVOJNI

SIMILITUDINI $\quad (a,b) \neq (0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{diretta}$$

$$\det(A) = a^2 + b^2 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2$$

Se $b = 0$ $\quad a \neq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = a$

la matrice è già diagonale

Se $b \neq 0$ le radici di $P(\lambda)$ non sono reali $\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{indiretta}$$

$$\det(A) = -a^2 - b^2 < 0$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)(-a-\lambda) - b^2$$

$$= \lambda^2 - a^2 - b^2$$

$$= \lambda^2 - (a^2 + b^2) = 0$$

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2+b^2} \quad \lambda_2 = -\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{matrix}} \quad \forall (a,b) \neq (0,0)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = \sqrt{a^2+b^2}\, x \\ bx - ay = \sqrt{a^2+b^2}\, y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(a - \sqrt{a^2+b^2}\right) x + by = 0 \\ bx - \left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = a + \sqrt{a^2+b^2} \\ y = b \end{matrix}}$$

è una delle soluz.

$$(a-\sqrt{a^2+b^2})(a+\sqrt{a^2+b^2})+b\cdot b = a^2-(a^2+b^2)+b^2=0$$

$$b(a+\sqrt{a^2+b^2})-(a+\sqrt{a^2+b^2})b = ba+b\sqrt{a^2+b^2}-ab-b\sqrt{a^2+b^2}=0$$

$\alpha\begin{pmatrix} a+\sqrt{a^2+b^2} \\ b \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore $\sqrt{a^2+b^2}$

$\lambda_2=-\sqrt{a^2+b^2}$ STESSO PROCEDIMENTO

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} ax+by=-\sqrt{a^2+b^2}\,x \\ bx-ay=-\sqrt{a^2+b^2}\,y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+\sqrt{a^2+b^2})x+by=0 \\ bx+(\sqrt{a^2+b^2}-a)y=0 \end{cases}$$

$x=a-\sqrt{a^2+b^2}$

$y=b$

è una delle soluzioni

$$(a+\sqrt{a^2+b^2})(a-\sqrt{a^2+b^2})+b^2 = a^2-(a^2+b^2)+b^2=0$$

$$b(a-\sqrt{a^2+b^2})+(\sqrt{a^2+b^2}-a)b = ba-b\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+b^2}-ab$$
$$=0$$

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} a+\sqrt{a^2+b^2} \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} a-\sqrt{a^2+b^2} \\ b \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a+\sqrt{a^2+b^2} & a-\sqrt{a^2+b^2} \\ b & b \end{pmatrix} = ab+b\sqrt{a^2+b^2} - ab+b\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=2b\sqrt{a^2+b^2}$$

per $b\neq 0$ ho trovato una base

per $b=0$ la matrice è già diagonale!

ES. 1.1.8 pag 5 appunti Prof. Martelli

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^3 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \qquad \text{molteplic. alg} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono autov.

$$\begin{cases} \cancel{x = x} \\ y + z = y \rightarrow z = 0 \\ \cancel{z = z} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

è autovettore di A $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

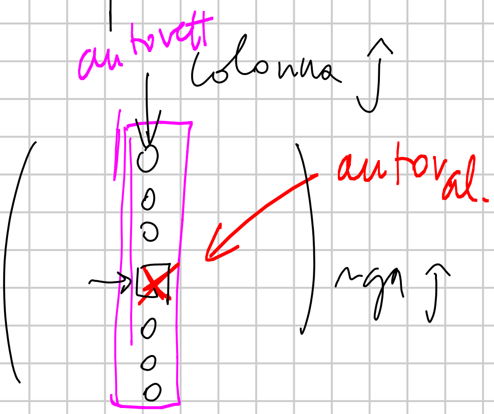
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non sono MAI lin indipendenti

A non è diagonalizzabile

Se avete una matrice quadrata



$$A\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \lambda=1$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \lambda=1$$

↖ autovett. con autov. 1

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix} = 2 \qquad \det \neq 0$$

$$A - \underset{\lambda=1}{\underset{\uparrow}{\lambda}} I = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \operatorname{rk}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autov. 2

anche $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore

$\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$ sono tutti autovettori con $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{2x} + y + z = \cancel{2x} \\ 0 + \cancel{2y} + z = \cancel{2y} \\ 0 + 0 + 2z = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \\ 0=0 \quad \text{inutile} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \text{qualsiasi} \\ z=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore

$\mathrm{Ker}(A)$ come è fatto?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0+y+0=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad z=-x \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \ \forall \alpha$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathrm{Ker}(A)$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (1-\lambda)\left[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1}\right] =$$

$$\lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori con $\lambda = 2$

[$\mathcal{E}(2)$ Sottosp. vett.]

Cerchiamo autovett. con $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y + z = x \\ y = y \\ x + y + z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

$z = -y$

$x = -y$

y qualsiasi

$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ è autovettore di A con $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

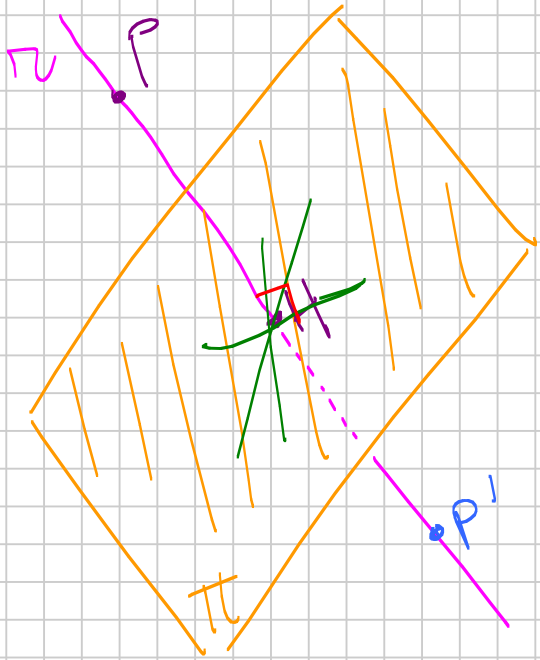
Base? $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Sì perché $\det \neq 0$

$$= 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 = 2 \neq 0$$

SIMMETRIE RISPETTO A UN PIANO

$r \perp \pi$

$\hat{rs} = 90° \quad \forall s \in \pi$



$H = r \cap \pi \qquad (r \perp \pi)$

$P' \in r$ tale che $PH = HP'$

P' è detto simmetrico di P rispetto al piano π

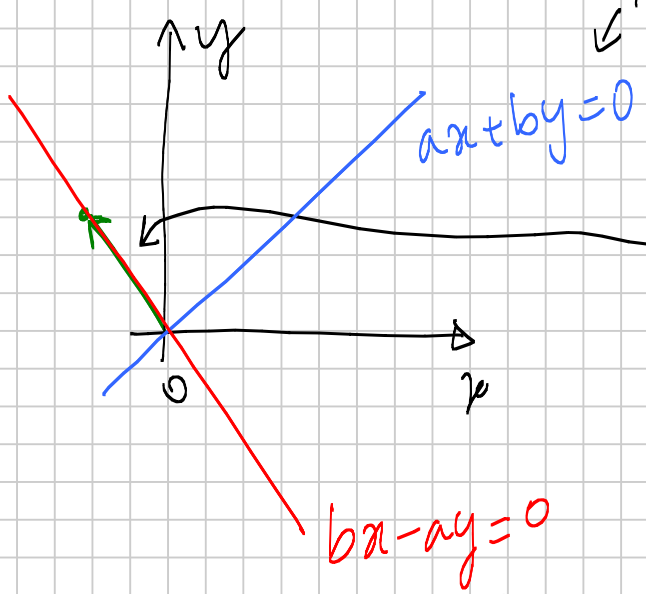
$\pi : 2x + 2y + z = 0$ passa per O

$P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ qualsiasi

devo costruire r

$ax + by + cz = 0$

$m = -\frac{a}{b}$ la direzione $(a\ b\ c)$ è $\perp$ al piano



$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$

retta passante per O e diretta come $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$ $\quad \boxed{bx - ay = 0}$ s

togliendo t

$m' = \frac{b}{a}$

$m \cdot m' = -1 \quad \perp$

$r : \begin{cases} x = 2 \cdot t + x_p \\ y = 2 \cdot t + y_p \\ z = 1 \cdot t + z_p \end{cases}$

passa per P (basta mettere $t=0$)

è $\perp$ al piano π perché il vettore che dà la direz. di r è proprio $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

trovíamo H

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x=2t+x_P \\ y=2t+y_P \\ z=t+z_P \end{cases}$$

$$2(2t+x_P)+2(2t+y_P)+(t+z_P)=0$$

$$4t+2x_P+4t+2y_P+t+z_P=0 \qquad 9t+(2x_P+2y_P+z_P)=0$$

$$t_H=-\frac{2x_P+2y_P+z_P}{9} \qquad x_H=-\frac{2}{9}(2x_P+2y_P+z_P)+x_P$$

$$=\frac{5}{9}x_P-\frac{4}{9}y_P-\frac{2}{9}z_P$$

$$y_H=-\frac{2}{9}(2x_P+2y_P+z_P)+y_P=-\frac{4}{9}x_P+\frac{5}{9}y_P-\frac{2}{9}z_P$$

$$z_H=-\frac{\cancel{2}1}{9}(2x_P+2y_P+z_P)+z_P=-\frac{2}{9}x_P-\frac{2}{9}y_P+\frac{8}{9}z_P$$

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \qquad P^2=P$$

(proiettore)

H è il punto medio di PP'

$$x_H = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \longrightarrow x_{P'} = 2x_H - x_P$$

$$y_H = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \longrightarrow y_{P'} = 2y_H - y_P$$

$$z_H = \frac{z_P + z_{P'}}{2} \longrightarrow z_{P'} = 2z_H - z_P$$

$$x_{P'} = \frac{10}{9}x_P - \frac{8}{9}y_P - \frac{4}{9}z_P - x_P = \frac{1}{9}x_P - \frac{8}{9}y_P - \frac{4}{9}z_P$$

$$y_{P'} = -\frac{8}{9}x_P + \frac{10}{9}y_P - \frac{4}{9}z_P - y_P = -\frac{8}{9}x_P + \frac{1}{9}y_P - \frac{4}{9}z_P$$

$$z_{P'} = -\frac{4}{9}x_P - \frac{4}{9}y_P + \frac{16}{9}z_P - z_P = -\frac{4}{9}x_P - \frac{4}{9}y_P + \frac{7}{9}z_P$$

$$S_\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & 1/9 & -4/9 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 7/9 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1/9-\lambda & -8/9 & -4/9 \\ -8/9 & \frac{1}{9}-\lambda & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8/9 & -4/9 \\ -1+\lambda & \frac{1}{9}-\lambda & -4/9 \\ 0 & -4/9 & \frac{7}{9}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8/9 & -4/9 \\ 0 & -7/9-\lambda & -8/9 \\ 0 & -4/9 & \frac{7}{9}-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[\left(-\frac{7}{9}-\lambda\right)\left(\frac{7}{9}-\lambda\right)-\frac{32}{81}\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2-\frac{49}{81}-\frac{32}{81}\right] \quad (1-\lambda)(\lambda^2-1)$$

$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = -1 \longrightarrow$ gli autovettori sono proprio i punti di r

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2t-16t-4t \\ -16t+2t-4t \\ -8t-8t+7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ -t \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

qualunque vettore $\in \pi$ è autovettore con autov. 1

$(P' = P)$

$x = \alpha \quad y = \beta \quad z = -2\alpha - 2\beta$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha-2\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \alpha-\cancel{8\beta}+8\alpha+\cancel{8\beta} \\ \cancel{-8\alpha}+\beta+\cancel{8\alpha}+8\beta \\ -4\alpha-4\beta-14\alpha-14\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha-2\beta \end{pmatrix} \to \text{autovettore con } \lambda = 1 \quad !$$