Compito di Geometria e algebra lineare del 9 gennaio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice invertibile. Si considerino le applicazione lineari $F_A, G_A : V \longrightarrow V$ definite da

$$F_A(X) = AXA^{-1} \qquad \text{e} \qquad G_A(X) = AX - XA.$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di F_A e G_A nel caso in cui $a = 1, b = c = 0, d = 2$.
b) Si dimostri che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per l'applicazione F_A è uguale all'autospazio relativo all'autovalore 0 per G_A.

Esercizio 3. Sia r una riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto ad un piano affine π che sposti il punto P di coordinate $(1, 1, 1)$ nel punto B di coordinate $(1, 3, 1)$. Dato un vettore $c \in \mathbb{R}^3$, sia inoltre $F_c : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'isometria definita da $F_c(v) = r(v) + c$.

a) Determinare il piano π.
b) Determinare la matrice A e il vettore b tali che $r(v) = A \cdot v + b$.
c) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}^3$ l'isometria F_c è una riflessione rispetto ad un piano. Che tipo di isometria è negli altri casi?

Esercizio 4. Si consideri il fascio di coniche

$$x^2 + (1 - t)y^2 + 2tx - 2(1 - t)y + 2 - t = 0$$

dipendenti da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di t la conica è non vuota?
b) Per quali valori di t la conica è una ellisse? una parabola? una iperbole?
c) Determinare il centro della conica, per quei valori di t in cui esiste.
d) Per quali valori di t la conica è una circonferenza?

Soluzioni compito del 9 gennaio

Esercizio 1. a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è la dimensione di $\ker(F - \lambda Id)$. La molteplicità algebrica di un autovalore λ è il massimo n tale che $(t - \lambda)^n$ divide il polinomio caratteristico di F.

b) Se $\dim V = 4$ e la molteplicità geometrica di 2 è quattro allora $\ker(F - 2Id) = V$ ovvero $F - 2Id = 0$ o equivalentemente $F = 2Id$.

Esercizio 2. a) Sia $\mathcal{E}$ la base standard di V: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & 1/2y\\2z & w\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix}0 & -y\\z & 0\end{pmatrix}$$

Quindi le matrici associate ad F_A e G_A sono

$$[F_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [G_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Quindi $p_F(t) = (t-1)^2(t-2)(t-1/2)$ e $p_G = t^2(t^2-1)$.

b) L'autospazio relativo all'autovalore 1 di F_A è l'insieme delle matrici X tali che $F_A(X) = X$ ovvero $AXA^{-1} = X$. Moltiplicando per A a destra otteniamo che è l'insieme delle matrici X tali che $AX = XA$.

L'autospazio relativo all'autovalore G di G_A è l'insieme delle matrici X tali che $G_A(X) = 0$ ovvero $AX - XA = 0$. Sommando XA otteniamo che è l'insieme delle matrici X tali che $AX = XA$.

Quindi i due autospazi coincidono.

Esercizio 3. a) Il piano π è il piano ortogonale al vettore $v_0 = Q - P$ e passante per il punto medio tra P e Q. Nel nostro caso è il piano $y = 2$.

b) Per trovare l'espressione della riflessione r rispetto al piano π realizziamo tale riflessione nel seguente modo:

- applichiamo la traslazione che porta il punto del piano $(0,2,0)$ nell'origine (va bene un qualsiasi punto del piano), in coordinate:
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y-2\\z\end{pmatrix}$$
- applichiamo la riflessione rispetto al piano $\pi_0 : \ y = 0$, in coordinate:
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\-y\\z\end{pmatrix}$$
- applichiamo la traslazione che porta l'origine nel punto $(0,2,0)$ (lo stesso scelto prima), in coordinate:
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}.$$

componendo le applicazioni una dopo l'altra otteniamo

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\y-2\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\-y+2\\-z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\-y+4\\-z\end{pmatrix}$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

c) Se F_c è una riflessione allora deve avere almeno un punto fisso. Studiamo quindi inanzitutto i punti fissi di F_c ovvero i punti che risolvono l'equazione $F_c(v) = Av + b + c = v$ che riscriviamo nella forma $(I - A)v = b + c$.

Osserviamo che
$$I - A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Quindi se c è della forma $(0, s, 0)$ allora l'applicazione ha come punti fissi il piano $y = 2 + \frac{s}{2}$ e quindi F_c è la riflessione rispetto a tale piano.

Se c non è di tale forma allora F_c non ha punti fissi e l'applicazione è la composizione di una riflessione e di una traslazione non nulla nella direzione del piano ovvero una glissoriflessione. Verifichiamo questo fatto.

Sia $c = d + e$ con d della forma $(0, s, 0)$ ed e nel piano $y = 0$. Abbiamo che
$$F_c(v) = F_d(v) + e.$$
Per quanto già osservato F_d è una riflessione rispetto ad un piano parallelo ad $y = 0$ ed e è nella direzione dello stesso piano, come volevamo.

Esercizio 4. Riscrivendo i termini $x^2 + 2tx$ e $(1-t)(y^2 - 2y)$ come differenza di due quadrati possiamo riscrivere la conica nella forma $(x+t)^2 + (1-t)(y-1)^2 - t^2 + t - 1 + 2 - t = 0$ ovvero, semplificando,
$$(x+t)^2 + (1-t)(y-1)^2 = t^2 - 1.$$
Cambiando variabili e chiamando $u = x + t$ e $v = y - 1$ possiamo riscriverla nella forma $u^2 + (1-t)v^2 = t^2 - 1$ che è già in forma diagonale.

a) La conica è vuota se $(1-t) > 0$ e $t^2 - 1 < 0$, ovvero se $1 > t > -1$.

b) La conica è una ellisse non degenere se $(1-t) > 0$ e $(t^2 - 1) > 0$ ovvero se $t < -1$.

La conica è una iperbole per $(1-t) < 0$ e $t^2 - 1 \neq 0$ ovvero per $t > 1$.

Rimangono da studiare i valori $t = \pm 1$. Per $t = 1$ otteniamo $(x+1)^2 = 0$ ovvero $x = -1$ che è una retta, mentre per $t = -1$ otteniamo $(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0$ ovvero $x = y = 1$ che è un punto.

In particolare la conica non è mai una parabola.

c) Per $t \leqslant -1$ o $t > 1$ la conica ha centro $(-t, 1)$, altrimenti non ha centro.

d) La conica è una circonferenza non degenere se $(1-t) = 1$ e $t^2 - 1 \geqslant 0$ che non si verifica mai. Per $t = 1$ la conica è un punto ovvero una circonferenza degenere di raggio 0.