Compito di algebra lineare del 18 luglio 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.
a) Si dia la definizione di cosa sia un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.
b) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia g un prodotto scalare su V. Dimostrare che se $g(v, v) = 0$ per ogni $v \in V$ allora $g(u, v) = 0$ per ogni $u, v \in V$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile x. Sia $T : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = p(0)x^3 + p'(x).$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di T e si dica se T è diagonalizzabile.
b) Si determini T^{20}.

Esercizio 3. Costruisci una isometria affine di $\mathbb{R}^3$

$$f(x) = Ax + b$$

che soddisfi contemporaneamente tutte le proprietà seguenti:

- $\det A < 0$;
- f non ha punti fissi;
- $f(\pi) = \pi$ con $\pi = \{y + z = 0\}$.

Esercizio 4. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^3$ dato da

$$g(x, y) = {}^{t}xSy$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) calcola la segnatura di g;
b) mostra che esiste un piano $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la restrizione $g|_W$ sia un prodotto scalare degenere.

Soluzioni del compito del 18 luglio

Esercizio 1. a) Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

i) $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
ii) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$ per ogni $u, v, w \in V$;
iii) $g(u, v) = g(v, u)$ per ogni $u, v \in V$.

Si può formulare la stessa definizione in altri modi equivalenti.

b) Siano, $u, v \in V$ allora

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\big(g(u + v, u + v) - g(u, u) - g(v, v)\big).$$

Poiché per ipotesi i tre termini sulla destra sono zero lo è anche $g(u, v)$.

Esercizio 2. Sia $p_i = x^{i-1}$ per $i = 1, 2, 3, 4$ allora $p_1, \dots, p_4$ è una base di V. Abbiamo

$$T(p_1) = p_4; \quad T(p_2) = p_1; \quad T(p_3) = 2p_2; \quad T(p_4) = 3p_3.$$

La matrice associata a T rispetto alla base $p_1, \dots, p_4$ è quindi

$$[T]_{p_i}^{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che $p_T(t) = t^4 - 6$, in particolare gli autovalori di T sono $\pm\sqrt[4]{6}$ e $\pm i\sqrt[4]{6}$. L'applicazione T non è diagonalizzabile perché non tutti gli autovalori sono reali.

b) Ricordiamo che per il teorema di Cayley-Hamilton $p_T(T) = 0$ quindi $T^4 = 6Id$ da cui $T^{20} = (T^4)^5 = 6^5\, Id = 7776\, Id$.

Esercizio 3. Consideriamo la riflessione R rispetto al piano π. Questa è una isometria di determinante -1 che lascia fissi i punti di π e scambia i due semispazi definiti da π, quello definito da $y+z > 0$ e quello definito da $y + z < 0$. Se componiamo R con una traslazione di un vettore non nullo $b \in \pi$ otteniamo una applicazione T con le proprietà richeste.

Calcoliamo ora esplicitamente T. Sia

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora π è il piano ortogonale a u quindi R è definito dalla formula: $R(v) = v - 2\frac{(u,v)}{u,u}u$ ovvero, in coordinate, da

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (y+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

La matrice associata a R rispetto alla base standard è

$$A = [R]_{e_i}^{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come vettore b possiamo scegliere qualsiasi vettore non nullo di π. Scegliendo per esempio $b = e_1$ otteniamo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. a) Consideriamo la base $v_1 = e_2$, $v_2 = e_3$ e $v_3 = e_1$ allora la matrice associata a g in questa base è la matrice

$$S' = [g]_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali sono $1, -1, 1$ quindi la forma bilineare ha segnatura $(1, 2, 0)$.

b) Prendiamo un vettore u isotropo e non nullo e costruiamo il suo ortogonale W. Poiché g è non degenere la dimensione di W è 2 inoltre poichè u è isotropo avremo $u \in W$ e quindi $g|_W$ è degenere. Possiamo prendere per esempio $u = e_1$ allora l'ortogonale di u rispetto a g è dato dall'equazione

$$0 = g(e_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = y + z.$$

Quindi W è definito dall'equazione $y + z = 0$ (e quindi ha dimensione 2) e contiene il vettore e_1 che è ortogonale a tutto W e quindi $g|_W$ è degenere.