Compitino di algebra lineare del 1 giugno 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Dimostra che se v_1, v_2 sono autovettori di T con autovalori distinti, allora sono indipendenti.
b) Se T è diagonalizzabile, allora T^2 è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 2. Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $M(2)$ lo spazio delle matrici 2×2 e $S \subset M(2)$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Considera il prodotto scalare g su $M(2)$ definito nel modo seguente:

$$g(A, B) = \operatorname{tr}(AB).$$

(1) Determina la segnatura di g.
(2) Determina la segnatura della restrizione $g|_S$ di g al sottospazio S.
(3) Considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito da

$$T(A) = {}^{\mathrm{t}}A.$$

L'endomorfismo T è una isometria rispetto a g? È simmetrico rispetto a g? Motiva le risposte.

Esercizio 4. Scrivi una isometria affine $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfi le proprietà seguenti:

(1) $f(\pi) \cap \pi = \emptyset$ dove π è il piano affine $\pi = \{x_3 = 0\}$;
(2) $f(r) = r$ dove r è la retta affine

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scrivi inoltre una isometria affine $g(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(\pi) \cap \pi = \emptyset$ e r sia l'unica retta affine invariante, cioè l'unica retta r per cui $g(r) = r$.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Siano v_1 e v_2 autovettori con autovalori λ_1 e λ_2. Se non fossero indipendenti, sarebbero uno multiplo dell'altro e otterremmo quindi $v_1 = kv_2$ per qualche $k \neq 0$ (ricordiamo che un autovettore è sempre non nullo per definizione, quindi $v_1, v_2 \neq 0$). Applicando T otteniamo $T(v_1) = T(kv_2)$ e svolgendo questa uguaglianza troviamo

$$k\lambda_1 v_2 = \lambda_1 v_1 = T(v_1) = T(kv_2) = kT(v_2) = k\lambda_2 v_2$$

che è assurdo perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

b) Sì. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di autovettori per T, allora è chiaramente anche una base di autovettori per T^2: infatti $T(v_i) = \lambda v_i$ implica

$$T^2(v_i) = T(\lambda v_i) = \lambda T(v_i) = \lambda^2 v_i$$

e quindi i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono autovettori anche per T^2, con autovalori $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

Esercizio 2. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} t-1-\lambda & 2t & t \\ 0 & t-1-\lambda & 0 \\ 2 & t+2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Svolgendo lungo la seconda riga troviamo

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (t-1-\lambda)\big((1-\lambda)(t-1-\lambda) - 2t\big) \\ &= (t-1-\lambda)(\lambda^2 - t\lambda + t - 1 - 2t) = (t-1-\lambda)(\lambda^2 - t\lambda - 1 - t). \end{aligned}$$

L'equazione di secondo grado ha $\Delta = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2$, quindi ha soluzioni reali per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il polinomio $p(\lambda)$ ha sempre tre radici reali:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t - 1, \\ \lambda_2 &= -1, \\ \lambda_3 &= t + 1. \end{aligned}$$

Quando queste sono distinte la matrice è diagonalizzabile. Restano da considerare i casi:

- $\lambda_1 = \lambda_2$, cioè $t = 0$. In questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$. La matrice ha la forma
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si verifica che $m_{\mathrm{g}}(-1) = m_{\mathrm{a}}(-1) = 2$. Quindi la matrice è diagonalizzabile.
- $\lambda_1 = \lambda_3$ non può mai accadere.
- $\lambda_2 = \lambda_3$, cioè $t = -2$. In questo caso $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. La matrice ha la forma
$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si verifica che $m_{\mathrm{g}}(-1) = 1 < 2 = m_{\mathrm{a}}(-1)$. Quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile se e solo se $t \neq -2$.

Esercizio 3.

(1) Consideriamo la base canonica
$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
di $M(2)$. Si verifica (esaminando i vari casi) che la matrice associata a g rispetto a questa base è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcolando gli autovalori si trova che la segnatura è $(3, 1, 0)$.

(2) Il sottospazio S ha dimensione 3 ed è generato dalle matrici
$$S_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice associata a $g|_S$ rispetto a questa base è
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice è definita positiva: la segnatura di $g|_S$ è $(3, 0, 0)$.

(3) Vale
$$g(T(A), T(B)) = g({}^{\mathrm{t}}A, {}^{\mathrm{t}}B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}(BA)) = \mathrm{tr}(BA) = g(B, A) = g(A, B)$$
quindi T è una isometria. Analogamente
$$g(T(A), B) = g({}^{\mathrm{t}}A, B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}(\,{}^{\mathrm{t}}AB)) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BA) = g(T(B), A)) = g(A, T(B))$$
quindi T è simmetrica.

Esercizio 4. Notiamo subito che π e r sono ortogonali. La traslazione $f(x) = x + e_3$ soddisfa le proprietà (1) e (2). Per fare sì che r sia l'unica retta affine invariante, possiamo prendere come g una qualsiasi rototraslazione con asse r. Ad esempio, una rototraslazione con direzione parallela a r e di angolo π è del tipo $g(x) = Ax + b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resta solo da determinare il vettore $b \in \mathbb{R}^3$ in modo che r sia l'asse della rototraslazione. Sappiamo che $b = g(0)$ e geometricamente vediamo che se r è l'asse allora $g(0)$ è ottenuto ruotando l'origine di π intorno a r e poi traslando lungo r di un certo passo $b_3 \neq 0$. Quindi

$$b = g(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Possiamo scegliere ad esempio $b_3 = 1$. Ovviamente è possibile anche scegliere un angolo diverso da π e un passo diverso da $b_3 = 1$ ed ottenere un'altra g che soddisfa le condizioni richieste.