A COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 19 FEBBRAIO 2016: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare z/w.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathsf{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathsf{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ è uguale a

B COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 19 FEBBRAIO 2016: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare w/z.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 4$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 7$ qualsiasi siano U e W.
B) Se $\dim U + W = 7$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.
C) $\dim(U \cap W) = 1$ qualsiasi siano U e W.
D) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 7$.
E) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathsf{Mat}_{3\times 7}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathsf{Mat}_{3\times 7}(\mathbb{R})$ è uguale a

COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 19 FEBBRAIO 2016: SECONDA PARTE

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Si definisca cosa è $\ker T$, il nucleo di T.

b) Si dimostri che se $\ker T = \{0\}$ allora T è iniettiva.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;

b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;

c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

d) Sia $k = 1$ e si consideri $g(t) = t + 1$. Sia A il sottospazio affine di V dei polinomi $p(t)$ tali che $L_1\big(p(t)\big) = g(t)$. Si determini la dimensione di A e se ne dia una parametrizzazione.

Esercizio 3. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.

b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.

c) Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 4. Sia C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_1 = 3v_1$.

b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_2 = -9\,v_2$.

c) Si calcoli C^{100}.

Soluzioni prima parte versione A

Domanda 1. $z/w = (3+i)/5$.

Domanda 2. $det(A) = 2$.

Domanda 3. $\dim\ker(L) = 2$.

Domanda 4. La risposta corretta è la D.

Domanda 5. $\dim \mathsf{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{R}) = 15$

Soluzioni prima parte versione B

Domanda 1. $w/z = (3-i)/2$

Domanda 2. $det(A) = -6$.

Domanda 3. $\dim\ker(L) = 4$.

Domanda 4. La risposta corretta è la E.

Domanda 5. $\dim \mathsf{Mat}_{7\times 3}(\mathbb{R}) = 21$

Soluzioni seconda parte

Gli esercizi proposti si prestano a soluzioni anche abbastanza diverse. Qui riportiamo una possibile soluzione.

Esercizio 1. a) Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare allora

$$\ker T = \{v \in V \,:\, T(v) = 0\}.$$

b) Vogliamo dimostrare che se $u, v \in V$ e $T(u) = T(v)$, allora $u = v$. Da $T(u) = T(v)$ e dal fatto che T è lineare otteniamo $T(u - v) = 0$. Poiché $\ker T = \{0\}$ ricaviamo che $u - v = 0$ ovvero $u = v$.

Esercizio 2. a) I polinomi $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$ e $f_2(t) = t^2$ sono una base di V. La matrice associata a L_k rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

b) Per $k \neq 1$ la matrice è già ridotta a scalini con le entrate lungo la diagonale diverse da zero, e ha quindi rango 3, ed in particolare è surgettiva.

Per $k = 1$ la matrice è pure già ridotta a scalini ma ha rango 2.

c) Per $k \neq 1$ abbiamo visto nel punto b) che l'applicazione L_k è surgettiva e qundi sicuramente esistono polinomi tali che $L_k(p(t)) = f(t)$.

Per $k = 1$ utilizzando la matrice calcolata nel punto a) osserviamo che $L_1(a + bt + ct^2) = b + c + 2ct$ e quindi non potrà mai essere uguale a $f(t)$.

d) Come osservato nel punto precedente $L_1(a+bt+ct^2) = b+c+2ct$. Quindi l'equazione $L_1(a+bt+ct^2) = g(t)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ 2c = 1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = 1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

Una parametrizzazione è quindi data da $F(s) = s + t/2 + t^2/2$ e il sottospazio ha dimensione 1.

Esercizio 3. a) Osserviamo che B è una matrice invertibile, infatti $\det B = -2$. Dimostriamo che $\ker T = \{0\}$. Infatti se $X \in \ker T$ allora $BX = 0$ da cui moltiplicando per B^{-1} ottengo $X = 0$. Dimostriamo che $\operatorname{Im} T = E$. Infatti se $Y \in E$ abbiamo che $T(B^{-1}Y) = BB^{-1}Y = Y$ e quindi Y è nell'immagine di T.

b) Una base dello spazio vettoriale E è data dalle matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. La matrice associata a T rispetto a questa base è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Sottraendo tre volte la prima riga alla terza e tre volte la seconda alla quarta nella matrice C, otteniamo $\det T = \det C = 4$.

Esercizio 4. a) Siano x e y le coordinate di v_1. Dall'equazione $Cv_1 = 3v_1$ ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} -5x + 4y = 3x \\ 8x - y = 3y \end{cases}$$

entrambe le equazioni del sistema sono equivalenti a $y = 2x$. Quindi una soluzione è $x = 1$, $y = 2$ ovvero

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Siano x e y le coordinate di v_2. Dall'equazione $Cv_1 = -9v_1$ ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} -5x + 4y = -9x \\ 8x - y = -9y \end{cases}$$

entrambe le equazioni del sistema sono equivalenti a $y = -x$. Quindi una soluzione è $x = 1$, $y = -1$ ovvero

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Sia $L_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione associata alla matrice C. Si noti che v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo la matrice associata a L_C rispetto a questa base, abbiamo

$$D = [L_C]_{v_1,v_2}^{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

da cui

$$D^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & (-9)^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix}.$$

Per calcolare C^{100} sfruttiamo il fatto che C e D sono la matrice associata a L_C rispetto a due basi diverse. La relazione tra C e D è data dal seguente cambio di base:

$$C = [L_C]^{e_1,e_2}_{e_1,e_2} = [Id]^{v_1,v_2}_{e_1.e_2}[L_C]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2}[Id]^{e_1,e_2}_{v_1,v_2} = ADB$$

con $A = [Id]^{v_1,v_2}_{e_1.e_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = [Id]^{e_1,e_2}_{v_1,v_2} = A^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}
C^{100} &= (ADA^{-1})^{100} = ADA^{-1}ADA^{-1}\cdots ADA^{-1} = AD^{100}A^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{100} & 9^{100} \\ 2 \cdot 3^{100} & -9^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{99} + 6 \cdot 9^{99} & 3^{99} - 3 \cdot 9^{99} \\ 2 \cdot 3^{99} - 6 \cdot 9^{99} & 2 \cdot 3^{99} + 3 \cdot 9^{99} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$