Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 2 del 2016

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema al variare dei parametri reali h, k:

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ h\,x-ky=-1 \\ k\,x-y+k\,z=-1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ h & -k & 0 & -1 \\ k & -1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

Con mosse di Gauss diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -k-h & -h & -1-hk \\ 0 & -1-k & 0 & -1-k^2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della incompleta è $-h(1+k)$. Se $h \neq 0$ e $k \neq -1$, il sistema ha un'unica soluzione. Se $h=0$, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -k & 0 & -1 \\ 0 & -1-k & 0 & -1-k^2 \end{pmatrix}$$

La matrice incompleta ha rango due per ogni k. La completa ha rango due solo per $k=1$. Quindi se $h=0$ il sistema non ha soluzioni, eccetto nel caso $k=1$ in cui ne ha infinite.

Valutiamo adesso il caso $k=-1$. La matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-h & -h & -1+h \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema non ha soluzioni. □

Esercizio 2. Si risolva la seguente equazione complessa

$$\exp(3\,z)-(1+i)\,\exp(2\,z)+i\,\exp(z)=0\,.$$

Svolgimento. Poniamo $w=\exp z$ e otteniamo

$$w^3-(1+i)w^2+iw=0$$

che ha soluzioni $w=0,1,i$. Per ciascuna di queste w risolviamo l'equazione $\exp z = w$ e otteniamo

$$z=2k\pi i, \quad \frac{1}{2}\pi i+2k\pi i.$$

al variare di k in $\mathbb{Z}$. □

Esercizio 3. Sono assegnate le rette $a : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ e $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$.

a) Si determini l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione di r attorno ad a. Si classifichi $\mathcal{S}$.

b) Si verifichi che la quadrica $\mathcal{Q} : 2\,x^2 - y^2 - z^2 + 6\,y\,z - 6\,y + 2\,z - 2 = 0$ è un iperboloide a una falda di rotazione attorno alla retta a.

Svolgimento. Le due rette sono parallele e quindi $\mathcal{S}$ è un cilindro. Usiamo altre coordinate ortogonali

$$X = x, \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z - 1), \quad Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z).$$

In queste coordinate la retta a è semplicemente $X = Y = 0$ e la retta r è $X = 0, Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi il cilindro ha equazione $Y^2 + X^2 = \frac{1}{2}$. Riportato nelle coordinate iniziali è

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2y - 2z = 0.$$

Studiamo la quadrica $\mathcal{Q}$. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa ha autovalori $2, 2, -4$ con autovettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 1, -1)$. Con il cambio di coordinate (X, Y, Z) l'equazione di $\mathcal{Q}$ si diagonalizza e si verifica che si ottiene un iperboloide a una falda con asse $a = \{X = Y = 0\}$. □

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -k-1 \\ -k & -k & k \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' al variare del parametro reale k.

b) Per $k = 0$ si scriva una base di autovettori di A.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + k)^2$$

quindi la matrice è sempre triangolabile. Per la diagonalizzabilità, la soluzione $\lambda = -k$ ha molteplicità geometrica sempre 1, tranne nel caso $k = 0$ in cui è 2. Quindi la matrice è diagonalizzabile solo per $k = 0$. In questo caso una base di autovettori è $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$. □

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione della parabola γ passante per il punto $A(-2,4)$, tangente nell'origine alla circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4\,y = 0$ ed avente asse di simmetria parallelo alla retta $s : x - 2\,y = 0$.

b) Si calcolino le coordinate del vertice V di γ.

c) Si determinino le coordinate del polo P della retta $y = 1$ rispetto a γ.

La circonferenza ha centro $(0,2)$ e raggio 2, quindi la tangenza di γ nell'origine è orizzontale. Il punto all'infinito di γ è $(2,1,0)$ perché ha asse s. Consideriamo il fascio in coordinate proiettive

$$\mu x_3 x_2 + \lambda(x_1 - 2x_2)^2$$

e imponendo il passaggio per A troviamo l'equazione di γ seguente:

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 25x = 0.$$

Sia C la matrice che descrive γ. Con l'equazione matriciale $(1,-2,0)C(x,y,1)$ si trova l'asse $x-2y+5 = 0$ ed intersecando con la parabola si trova il vertice $V(-3,1)$. Analogamente si scrive l'equazione della retta polare di un punto (a,b,c) come $(a,b,c)C(x,y,1)$ ed imponendo che venga $y+1$ si ottiene il punto $P(2,-1)$.