Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 2 del 2016

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema al variare dei parametri reali h, k:

$$\begin{cases} h\,x + ky = -1 \\ k\,x + y + k\,z = 1 \\ x + y + z = -k \end{cases}$$

Soluzione. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} h & k & 0 & -1 \\ k & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

Con mosse di Gauss diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & k-h & -h & -1+kh \\ 0 & 1-k & 0 & 1+k^2 \\ 1 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

Il determinante della incompleta è $h(1-k)$. Se $h \neq 0$ e $k \neq 1$, il sistema ha un'unica soluzione. Se $h = 0$, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & 0 & 1+k^2 \\ 1 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

La matrice incompleta ha rango due per ogni k. La completa ha rango due solo per $k = -1$. Quindi se $h = 0$ il sistema non ha soluzioni, eccetto nel caso $k = -1$ in cui ne ha infinite.

Valutiamo adesso il caso $k = 1$. La matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-h & -h & -1+h \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema non ha soluzioni. □

Esercizio 2. Si risolva la seguente equazione complessa

$$\exp(3\,z) - (1-i)\,\exp(2\,z) - i\,\exp(z) = 0\,.$$

Svolgimento. Poniamo $w = \exp z$ e otteniamo

$$w^3 - (1-i)w^2 - iw = 0$$

che ha soluzioni $w = 0, 1, -i$. Per ciascuna di queste w risolviamo l'equazione $\exp z = w$ e otteniamo

$$z = 2k\pi i, \quad -\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i.$$

al variare di k in $\mathbb{Z}$. □

Esercizio 3. Sono assegnate le rette $a : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ e $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

a) Si determini l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione di r attorno ad a. Si classifichi $\mathcal{S}$.

b) Si verifichi che la quadrica $\mathcal{Q} : 2\,x^2 - y^2 - z^2 - 6\,y\,z - 6\,y - 2\,z - 2 = 0$ è un iperboloide a una falda di rotazione attorno alla retta a.

Svolgimento. Le due rette sono parallele e quindi $\mathcal{S}$ è un cilindro. Usiamo altre coordinate ortogonali

$$X = x, \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z - 1), \quad Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z).$$

In queste coordinate la retta a è semplicemente $X = Y = 0$ e la retta r è $X = 0, Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi il cilindro ha equazione $Y^2 + X^2 = \frac{1}{2}$. Riportata nelle coordinate iniziali l'equazione diventa

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2y + 2z = 0.$$

Studiamo la quadrica $\mathcal{Q}$. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa ha autovalori $2, 2, -4$ con autovettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$ e $(0, 1, 1)$. Con il cambio di coordinate (X, Y, Z) l'equazione di $\mathcal{Q}$ si diagonalizza e si verifica che si ottiene un iperboloide a una falda con asse $a = \{X = Y = 0\}$. $\square$

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & k \\ 0 & k & k \\ -k & k & k \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' al variare del parametro reale k.

b) Per $k = 0$ si scriva una base di autovettori di A.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - k)^2$$

quindi la matrice è sempre triangolabile. Per la diagonalizzabilità, la soluzione $\lambda = k$ ha molteplicità geometrica sempre 1, tranne nel caso $k = 0$ in cui è 2. Quindi la matrice è diagonalizzabile solo per $k = 0$. In questo caso una base di autovettori è $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$. $\square$

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione della parabola γ passante per il punto $A(-4,-2)$, tangente nell'origine alla circonferenza $\mathcal{C}\,:\,x^2+y^2+4\,x=0$ ed avente asse di simmetria parallelo alla retta $s:2\,x+y=0\,.$

b) Si calcolino le coordinate del vertice V di γ.

c) Si determinino le coordinate del polo P della retta $x+1=0$ rispetto a γ.

Dimostrazione. La circonferenza ha centro $(-2,0)$ e raggio 2, quindi la tangenza di γ nell'origine è verticale. Il punto all'infinito di γ è $(1,-2,0)$ perché ha asse s. Consideriamo il fascio in coordinate proiettive

$$\mu x_3x_1+\lambda(2x_1+x_2)^2$$

e imponendo il passaggio per A troviamo l'equazione di γ seguente:

$$4x^2+y^2+4xy+25x=0.$$

Sia C la matrice che descrive γ. Con l'equazione matriciale $(1,-2,0)C(x,y,1)$ si trova l'asse $2x+y+5=0$ ed intersecando con la parabola si trova il vertice $V(-1,-3)$. Analogamente si scrive l'equazione della retta polare di un punto (a,b,c) come $(a,b,c)C(x,y,1)$ ed imponendo che venga $x+1$ si ottiene il punto $P(1,-2)$. $\square$