Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 1 del 2016

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema al variare dei parametri reali k, h:

$$\begin{cases} 2\,x + y - 2\,k\,z = k - 1 \\ k\,x - y + 2\,z = 2 - h \\ x - y + 2\,z = k \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2k & k-1 \\ k & -1 & 2 & 2-h \\ 1 & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

e con due mosse di Gauss si trasforma in

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2k-4 & -k-1 \\ k-1 & 0 & 0 & 2-h-k \\ 1 & -1 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice incompleta è $(k-1)(6-(2k+4)) = -2(k-1)^2$. Se $k \neq 1$, le matrici incompleta e completa hanno rango 3 e quindi esiste un'unica soluzione. Se $k = 1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema non ha soluzione se $h \neq 1$, e ne ha infinite se $h = 1$. □

Esercizio 2. Sapendo che ammette soluzioni reali si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$p(z) = z^4 + 2\,z^3 + (9\,i - 8)\,z^2 + 18\,i\,z - 72\,i = 0\,.$$

Svolgimento. Le equazioni reali devono soddisfare la parte immaginaria dell'equazione, data da:

$$9iz^2 + 18iz - 72i = 0$$

e cioè

$$z^2 + 2z - 8 = 0.$$

Questo polinomio ha radici 2 e -4. Si verifica che queste sono anche radici di $p(z)$. Dividiamo quindi il polinomio originario per z^2+2z-8 e otteniamo

$$p(z) = (z^2 + 2z - 8)(z^2 + 9i).$$

Le altre due radici complesse di p sono le due radici di $-9i$, e cioè

$$\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

$\square$

Esercizio 3. Sono assegnati il punto $V(0, 0, 0)$ e il piano $\pi : y - z - 2 = 0$.

a) Si determini il punto C proiezione ortogonale di V su π.

b) Considerata la circonferenza γ contenuta nel piano π, avente centro in C e di raggio 2, si determini l'equazione cartesiana del cono di vertice V e direttrice γ.

Svolgimento. La retta ortogonale a π passante per l'origine è generata da $(0, 1, -1)$. Il punto $C = (0, 1, -1)$ è quello cercato.

La circonferenza è formata da tutti gli (a, b, c) tali che

$$\begin{cases} b - c - 2 = 0, \\ a^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2 = 4. \end{cases}$$

Quindi il cono è formato da tutti gli (x, y, z) tali che

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \\ b - c - 2 = 0 \\ a^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2 = 4 \end{cases}$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una equazione quadratica in a, b, c, nel modo seguente. Possiamo supporre $t \neq 0$.

$$\begin{cases} a = \frac{x}{t} \\ b = \frac{y}{t} \\ c = \frac{z}{t} \\ \frac{y-z}{t} - 2 = 0 \\ a^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2 = 4 \end{cases}$$

Quindi $t = \frac{y-z}{2}$ e otteniamo

$$\begin{cases} a = \frac{2x}{y-z} \\ b = \frac{2y}{y-z} \\ c = \frac{2z}{y-z} \\ a^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 = 4 \end{cases}$$

quindi

$$\frac{4x^2}{(y-z)^2} + \frac{(y+z)^2}{(y-z)^2} + \frac{(y+z)^2}{(y-z)^2} = 4$$

e

$$4x^2 + 2(y+z)^2 = 4(y-z)^2$$

che diventa

$$2x^2 - y^2 - z^2 + 6yz = 0.$$

□

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} -2\,k & 0 & -3 \\ 0 & 1 & k \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' al variare del parametro reale k.

b) Posto $k = -4$ si determini una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

c) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ la cui matrice associata rispetto alla base $\{1\,,\, t\,,\, t^2\,\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ coincide con A per $k = 0$. Si determini $T^{-1}(2\,t + 6)$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 2k\lambda - 3k)$$

ed ha radici

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -k + \sqrt{k^2+3k}, \qquad \lambda_3 = -k - \sqrt{k^2+3k}.$$

Se $-3 < k < 0$, le radici non sono reali e A non è né triangolabile né diagonalizzabile. Per gli altri valori, le radici sono reali e A è triangolabile.

Le tre radici sono sempre distinte, tranne per $k = -3, 0, 1$. In questi tre casi c'è un autovalore con molteplicità algebrica due, e si verifica che in tutti e tre i casi questo ha molteplicità geometrica uno.

Quindi A è diagonalizzabile se e solo se $k \in (-\infty, -3) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$.
Per $k = -4$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e gli autovalori sono 1, 2, 6. Si trova che tre autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice seguente funzione

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 1 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Per $k = 0$ la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il punto c) chiede di determinare la controimmagine del vettore $v = (6, 2, 0)$. Risolvendo il sistema $Ax = v$ si trova che la controimmagine è formata da tutti i vettori del tipo $(x, 2, -2)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione dell'iperbole γ sapendo che e' simmetrica rispetto alla retta $r : x - y - 1 = 0$, un suo vertice è $V_1(1, 0)$ e un suo asintoto e' la retta $a_1 : x - 3\,y + 1 = 0$.

b) Si determini l'equazione della conica γ' tangente all'asse delle y e bitangente a γ nei suoi vertici.

c) Si classifichi γ'.

Svolgimento. Il centro $C = r \cap a_1$ è $(2, 1)$, quindi l'altro vertice è $V_2(3, 2)$ e l'altro asintoto è $a_2 : 3x - y - 5 = 0$. Scriviamo le rette in forma proiettiva e costruiamo il fascio delle coniche tangenti agli asintoti nei loro due punti all'infinito:

$$\mu(x_1 - 3x_2 + x_3)(3x_1 - x_2 - 5x_3) + \lambda x_3^2 = 0$$

Imponiamo che la conica passi per $V_1(1, 0)$, in coordinate proiettive $(1, 0, 1)$, e otteniamo $\mu 2(-2) + \lambda = 0$, cioè $\lambda = 4\mu$. Quindi ponendo $\mu = 1$ e tornando in coordinate cartesiane (x, y) si ottiene:

$$0 = (x - 3y + 1)(3x - y - 5) + 4 = 3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2x + 14y - 1.$$

Questa è l'equazione di γ. Per trovare γ', notiamo che le tangenti a γ nei vertici sono

$$x + y = 1, \qquad x + y = 5.$$

Costruiamo quindi il fascio delle coniche tangenti a queste rette nei due vertici nel modo seguente:

$$\lambda(x_1 + x_2 - x_3)(x_1 + x_2 - 5x_3) + \mu(x_1 - x_2 - x_3)^2 = 0.$$

Imponiamo la tangenza con l'asse y aggiungendo l'equazione $x_1 = 0$ e imponendo che il sistema abbia una soluzione sola (con molteplicità doppia). Otteniamo

$$\lambda(x_2 - x_3)(x_2 - 5x_3) + \mu(x_2 + x_3)^2 = 0.$$

In coordinate cartesiane

$$0 = (\lambda(y - 1)(y - 5) + \mu(y + 1)^2 = (\lambda + \mu)y^2 + (2\mu - 6\lambda)y + \mu + 5\lambda.$$

Questa equazione ha una soluzione doppia per

$$0 = \frac{\Delta}{4} = (\mu - 3\lambda)^2 - (\mu + 5\lambda)(\mu + \lambda)$$

e cioè

$$4\lambda(\lambda - 3\mu) = 0.$$

La soluzione $\lambda = 0$ non è quella che cerchiamo, quindi $\lambda = 3\mu$ fornisce la conica

$$3(x + y - 1)(x + y - 5) + (x - y - 1)^2 = 0$$

e cioè

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 4 = 0.$$

Questa è una ellisse. □