Università di Pisa

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:

Scritto n. 1 del 2016

Esercizio 1. Si studi il seguente sistema al variare dei parametri reali k, h :

$$\begin{cases} k\,x - y - 2\,z = h - 2 \\ x + y + 2\,z = -k \\ 2\,x - y + 2\,k\,z = -k - 1 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} k & -1 & -2 & h-2 \\ 1 & 1 & 2 & -k \\ 2 & -1 & 2k & -k-1 \end{pmatrix}$$

e con due mosse di Gauss si trasforma in

$$\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 & h-2-k \\ 1 & 1 & 2 & -k \\ 3 & 0 & 2k+2 & -2k-1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice incompleta è $2(k+1)^2$. Se $k \neq -1$, le matrici incompleta e completa hanno rango 3 e quindi esiste un'unica soluzione. Se $k = -1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema non ha soluzioni se $h \neq 1$, e ne ha infinite se $h = 1$. □

Esercizio 2. Sapendo che ammette soluzioni reali si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - z^3 - (6 + 16\,i)\,z^2 + 16\,i\,z + 96\,i = 0\,.$$

Svolgimento. Le equazioni reali devono soddisfare la parte immaginaria dell'equazione, data da:

$$-16iz^2 + 16iz + 96i = 0$$

e cioè

$$-z^2 + z + 6 = 0.$$

Questo polinomio ha radici 2 e -3. Si verifica che queste sono anche radici di $p(z)$. Dividiamo quindi il polinomio originario per $z^2 + z + 6$ e otteniamo

$$p(z) = (z^2 - z - 6)(z^2 + 16i).$$

Le altre due radici complesse di p sono le due radici di $16i$, e cioè

$$\pm 2\sqrt{2}(1 + i).$$

$\square$

Esercizio 3. Sono assegnati il punto $V(0, 0, 0)$ e il piano $\pi : x + z - 2 = 0$.

a) Si determini il punto C proiezione ortogonale di V su π.

b) Considerata la circonferenza γ contenuta nel piano π, avente centro in C e di raggio 2, si determini l'equazione cartesiana del cono di vertice V e direttrice γ.

Svolgimento. La retta ortogonale a π passante per l'origine è generata da $(1, 0, 1)$. Il punto $C = (1, 0, 1)$ è quello cercato.

La circonferenza è formata da tutti gli (a, b, c) tali che

$$\begin{cases} a + c - 2 = 0, \\ (a - 1)^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 4. \end{cases}$$

Quindi il cono è formato da tutti gli (x, y, z) tali che

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \\ a + c - 2 = 0, \\ (a - 1)^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 4. \end{cases}$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una equazione quadratica in a, b, c, nel modo seguente. Possiamo supporre $t \neq 0$.

$$\begin{cases} a = \frac{x}{t} \\ b = \frac{y}{t} \\ c = \frac{z}{t} \\ \frac{x+z}{t} - 2 = 0 \\ a + c - 2 = 0, \\ (a - 1)^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 4. \end{cases}$$

Quindi $t = \frac{x+z}{2}$ e otteniamo

$$\begin{cases} a = \frac{2x}{x+z} \\ b = \frac{2y}{x+z} \\ c = \frac{2z}{x+z} \\ (a-1)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 4. \end{cases}$$

quindi

$$\frac{(x-z)^2}{(x+z)^2} + \frac{(2y)^2}{(x+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(x+z)^2} = 4$$

e

$$(x-z)^2 + (2y)^2 + (z-x)^2 = 4(x+z)^2$$

che diventa

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 6xz = 0.$$

□

Esercizio 4. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -3 & 2\,k & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si studi la triangolabilita' e la diagonalizzabilita' al variare del parametro reale k.

b) Posto $k = 4$ si determini una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

c) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$la cui matrice associata rispetto alla base $\{1\,,\,t\,,\,t^2\,\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ coincide con A per $k = 0$. Si determini $T^{-1}(3\,t^2 - 6\,t)$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2k\lambda + 3k)$$

ed ha radici

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = k + \sqrt{k^2 - 3k}, \qquad \lambda_3 = k - \sqrt{k^2 - 3k}.$$

Se $0 < k < 3$, le radici non sono reali e A non è né triangolabile né diagonalizzabile. Per gli altri valori, le radici sono reali e A è triangolabile.

Le tre radici sono sempre distinte, tranne per $k = -1, 0, 3$. In questi tre casi c'è un autovalore con molteplicità algebrica due, e si verifica che in tutti e tre i casi questo ha molteplicità geometrica uno.

Quindi A è diagonalizzabile se e solo se $k \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, \infty)$.
Per $k = 4$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e gli autovalori sono 1, 2, 6. Si trova che tre autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice seguente funzione

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 15 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Per $k = 0$ la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il punto c) chiede di determinare la controimmagine del vettore $v = (0, -6, 3)$. Risolvendo il sistema $Ax = v$ si trova che la controimmagine è formata da tutti i vettori del tipo $(2, y, 3)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 5. a) Si determini l'equazione dell'iperbole γ sapendo che e' simmetrica rispetto alla retta $r : x - y + 1 = 0$, un suo vertice è $V_1(0, 1)$ e un suo asintoto e' la retta $a_1 : 3\,x - y - 1 = 0$.

b) Si determini l'equazione della conica γ' tangente all'asse delle x e bitangente a γ nei suoi vertici.

c) Si classifichi γ'.

Svolgimento. Il centro $C = r \cap a_1$ è $(1, 2)$, quindi l'altro vertice è $V_2(2, 3)$ e l'altro asintoto è $a_2 : 3y - x - 5 = 0$. Scriviamo le rette in forma proiettiva e costruiamo il fascio delle coniche tangenti agli asintoti nei loro due punti all'infinito:

$$\mu(-3x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + 3x_2 - 5x_3) + \lambda x_3^2 = 0$$

Imponiamo che la conica passi per $V_1(0,1)$, in coordinate proiettive $(0,1,1)$, e otteniamo $\mu 2(-2)+\lambda=0$, cioè $\lambda=4\mu$. Quindi ponendo $\mu=1$ e tornando in coordinate cartesiane (x,y) si ottiene:

$$0=(y-3x+1)(3y-x-5)+4=3x^2+3y^2-10xy+14x-2y-1.$$

Questa è l'equazione di γ. Per trovare γ', notiamo che le tangenti a γ nei vertici sono

$$x+y=1, \qquad x+y=5.$$

Costruiamo quindi il fascio delle coniche tangenti a queste rette nei due vertici nel modo seguente:

$$\lambda(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_2-5x_3)+\mu(-x_1+x_2-x_3)^2=0.$$

Imponiamo la tangenza con l'asse x aggiungendo l'equazione $x_2=0$ e imponendo che il sistema abbia una soluzione sola (con molteplicità doppia). Otteniamo

$$\lambda(x_1-x_3)(x_1-5x_3)+\mu(x_1+x_3)^2=0.$$

In coordinate cartesiane

$$0=(\lambda(x-1)(x-5)+\mu(x+1)^2=(\lambda+\mu)x^2+(2\mu-6\lambda)x+\mu+5\lambda.$$

Questa equazione ha una soluzione doppia per

$$0=\frac{\Delta}{4}=(\mu-3\lambda)^2-(\mu+5\lambda)(\mu+\lambda)$$

e cioè

$$4\lambda(\lambda-3\mu)=0.$$

La soluzione $\lambda=0$ non è quella che cerchiamo, quindi $\lambda=3\mu$ fornisce la conica

$$3(x+y-1)(x+y-5)+(-x+y-1)^2=0$$

e cioè

$$x^2+y^2+xy-4x-5y+4=0.$$

Questa è una ellisse. $\square$