ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE (II PARTE)

versione: 14 maggio 2016

In ogni sezione gli esercizi sono tendenzialmente ordinati per difficoltà crescente.

1. Autovettori e autovalori

Esercizio 1.1. Trova gli autovalori in $\mathbb{C}$ e gli autovettori in $\mathbb{C}^2$ della matrice complessa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & i \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 1.2. La matrice seguente è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 \\ k-1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.5. Data la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{smallmatrix}\right)$, determinare A^{10}.

Esercizio 1.6. Considera la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito come $T(X) = AX$.

- Scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $M(2)$.
- L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 1.7. Sia $A \in M(2)$ una matrice fissata e considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito come $T(X) = AX$.

- Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se A lo è.
- Scrivi una base di autovettori per T nel caso $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 1.8. Considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito usando la trasposta come $T(X) = {}^{t}X$.

- Scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $M(2)$.

- L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 1.9. Trova due matrici $A, B \in M(2)$ che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma polinomi minimi diversi.

Esercizio 1.10. Costruisci un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ senza autovettori.

Esercizio 1.11. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo invertibile. Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se T^{-1} è diagonalizzabile.

Esercizio 1.12. È sempre vero che la composizione di due endomorfismi diagonalizzabili è diagonalizzabile? Se sì, dimostralo. Se no, esibisci un controesempio.

Esercizio 1.13. Mostra che se $T : V \to V$ è diagonalizzabile allora $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

Esercizio 1.14. Mostra che una matrice $M \in M(n)$ è diagonalizzabile se e solo se lo è la sua trasposta ${}^tM$.

Esercizio 1.15. Sia $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ e $T : V \to V$ un endomorfismo tale che $T(V_i) \subset V_i$ per ogni i. Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se ciascuna restrizione $T|_{V_i}$ è diagonalizzabile.

2. Prodotti scalari

2.1. **Fatti generali.**

Esercizio 2.1. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Dimostra la *legge del parallelogramma*: per ogni $v, w \in V$ vale l'uguaglianza

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big).$$

Esercizio 2.2. Sia $g(x, y) = {}^txSy$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito da $S = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Scrivi la matrice associata a g nella base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifica che la matrice che ottieni è congruente a S. Determina i *vettori isotropi*, cioè i vettori v tali che $g(v, v) = 0$.

Esercizio 2.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.

- Mostra che per ogni $v \in V$ non nullo esiste un prodotto scalare g definito positivo su V tale che $g(v, v) = 1$.
- Mostra che per ogni coppia $v, w \in V$ di vettori indipendenti esiste un prodotto scalare g definito positivo su V tale che $g(v, w) = 0$.

Esercizio 2.4. Mostra che $g(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$ con $A, B \in M(n)$ definisce un prodotto scalare su $M(n)$. Mostra che non è definito positivo per $n = 2$.

Esercizio 2.5. Mostra che

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \ldots + p(n)q(n)$$

è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}_n[x]$.

Esercizio 2.6. Mostra che

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \ldots + p(n)q(n)$$

è un prodotto scalare semi-definito positivo su $\mathbb{R}_{n+1}[x]$, ma non definito positivo.

2.2. **Proiezioni.** Quando non è specificato diversamente, il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è sempre quello euclideo.

Esercizio 2.7. Considera il piano $U = \{x+y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$ e scrivi la matrice associata alla proiezione ortogonale p_U su U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.8. Considera il piano $U = \{x+2y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$. Trova una base ortonormale per U e completala a base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.9. Considera il piano $U = \{4x-3y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$ e indica con p e q le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente su U e $U^\perp$. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivi la matrice associata a p rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) L'endomorfismo $f(x) = p(x) - q(x)$ è diagonalizzabile?
(3) Determina il sottospazio ortogonale a U rispetto al prodotto scalare $\langle x, y \rangle = \langle {}^t x A y \rangle$.

Esercizio 2.10. Siano $U, U' \subset \mathbb{R}^3$ due piani distinti. Considera la composizione $f = p_{U'} \circ p_U$ delle proiezioni ortogonali su U e U'. Mostra che f ha un autovalore 0, un autovalore 1, e un terzo autovalore $\lambda \in [0,1]$.

Suggerimento: Disegna i due piani e determina geometricamente tre autovettori indipendenti per f. □

Esercizio 2.11. Sia g un prodotto scalare su V. Mostra che:

(1) se tutti i vettori sono isotropi, allora il prodotto scalare è banale, cioè $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $v, w \in V$;
(2) se g è *indefinito*, cioè esistono v e w con $g(v,v) > 0$ e $g(w,w) < 0$, allora esiste un vettore isotropo non banale.

2.3. **Segnatura.**

Esercizio 2.12. Calcola la segnatura delle seguenti matrici al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+1 & \alpha+2 \\ \alpha+1 & \alpha+2 & \alpha+1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.13. Considera il prodotto scalare su $M(2)$ dato da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB).$$

Mostra che è un prodotto scalare e calcolane la segnatura.

Esercizio 2.14. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre

$$W = \{2x + y = z\}.$$

(1) Calcola la segnatura di S.
(2) Determina una base per $W^\perp$.

Esercizio 2.15. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia inoltre

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1) Calcola la segnatura di S.
(2) Determina una base per $W^\perp$.

Esercizio 2.16. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_4[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

(1) Scrivi la matrice associata rispetto alla base canonica.
(2) Trova una base del radicale $\mathbb{R}_4[x]^\perp$.
(3) Determina la segnatura del prodotto scalare.

2.4. **Isometrie e prodotto vettoriale.**

Esercizio 2.17. Trova assi e angoli di rotazione delle seguenti isometrie di $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.18. Scrivi una matrice $A \in M(3)$ che rappresenti una rotazione intorno all'asse
$$r = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
di angolo $\frac{2\pi}{3}$.

Esercizio 2.19. Se $\operatorname{Rif}_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la riflessione lungo un piano $U \subset \mathbb{R}^3$, che tipo di isometria è $-\operatorname{Rif}_U$?

Esercizio 2.20. Mostra che esistono esattamente 48 matrici ortogonali $A \in M(3)$ i cui coefficienti A_{ij} siano tutti numeri interi. Quante di queste preservano l'orientazione di $\mathbb{R}^3$? Quali sono i loro assi? L'insieme
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \leqslant x, y, z \leqslant +1 \right\}$$
è un cubo centrato nell'origine. Verifica che le 48 matrici ortogonali A così ottenute sono tutte simmetrie del cubo, cioè $L_A(C) = C$.

Esercizio 2.21. Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometria. Mostra che se $\det T = 1$ allora T preserva il prodotto vettoriale, cioè
$$T(u) \times T(v) = u \times v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$
Cosa succede se $\det T = -1$?

Esercizio 2.22. Sia $u \in \mathbb{R}^3$ unitario e w un vettore ortogonale a u. Mostra che
$$u \times (u \times w) = -w.$$

Esercizio 2.23. Mostra che ogni isometria $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\det T = -1$ è una antirotazione, cioè esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ tale che
$$A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \operatorname{Rot}_\theta \end{pmatrix}$$
per qualche angolo θ.

2.5. Rette e piani nello spazio.

Esercizio 2.24. Considera i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Trova delle equazioni parametriche per la retta r passante per P e Q.
(2) Trova delle equazioni cartesiane per il piano π ortogonale a r e passante per R.
(3) Trova delle equazioni cartesiane per il piano ortogonale a π, contenente r, e parallelo alla retta passante per R e S.

Esercizio 2.25. Considera le rette

$$r = \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + z = 1, \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x + z = 1, \\ y - z = -2. \end{cases}$$

(1) Determina se sono incidenti, parallele o sghembe. Calcola la loro distanza e trova tutte le rette perpendicolari a entrambe.
(2) Determina i piani contenenti r che sono paralleli a s.

Esercizio 2.26. Siano P e Q due punti distinti di $\mathbb{R}^3$. Mostra che il luogo dei punti equidistanti da P e Q è un piano π.

Esercizio 2.27. Siano r e r' due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$ e P un punto disgiunto da r e r'. Mostra che esiste un'unica retta s passante per P che interseca r e r'.

Suggerimento. Considera i piani π e π' che contengono P e r e P e r', rispettivamente. □

Esercizio 2.28. Nell'esercizio precedente, determina esplicitamente s nel caso seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \left\{ \frac{x_1 + 3}{2} = 1 - x_2 = -2x_3 \right\}, \quad r' = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2.6. Affinità.

Esercizio 2.29. Considera il piano affine $\pi = \{x + y - z = 2\}$ in $\mathbb{R}^3$. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ che rappresenta una riflessione rispetto a π.

Esercizio 2.30. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ che rappresenta una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno al punto $P = \binom{3}{1}$.

Esercizio 2.31. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta una rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno all'asse r seguente:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 2.32. Siano f e g due rotazioni del piano $\mathbb{R}^2$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno a due punti P e Q. Mostra che la composizione $f \circ g$ è una riflessione rispetto ad un qualche punto R.

Esercizio 2.33. Siano f e g due riflessioni di $\mathbb{R}^2$ intorno a due rette affini r e s. Mostra che:

- se r e s sono parallele, la composizione $f \circ g$ è una traslazione;
- se r e s sono incidenti, la composizione $f \circ g$ è una rotazione.

Esercizio 2.34. Siano r e r' due rette affini qualsiasi in $\mathbb{R}^3$. Mostra che esiste sempre una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = r'$.

Esercizio 2.35. Sia $f(x) = Ax + b$ un isomorfismo affine di $\mathbb{R}^3$. Mostra che esiste sempre una retta affine r tale che $f(r)$ e r siano paralleli.

Suggerimento. Osserva che questo fatto in $\mathbb{R}^2$ è falso. □

Esercizio 2.36. Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ e $D, E, F \in \mathbb{R}^2$ due terne di punti non allineati. Mostra che esiste un'unica affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$f(A) = D, \ f(B) = E, \ f(C) = F.$$

Deduci che i triangoli sono tutti affinemente equivalenti.

Mostra lo stesso enunciato nello spazio $\mathbb{R}^3$ con quattro punti non complanari A, B, C, D e E, F, G, H e deduci che i tetraedri sono tutti affinemente equivalenti.

Esercizio 2.37. Determina due quadrilateri Q e Q' in $\mathbb{R}^2$ che non sono affinemente equivalenti, cioè tali che non esista nessuna affinità f per cui $f(Q) = Q'$.

Esercizio 2.38. Mostra che il parallelismo e il baricentro sono concetti affini, ovvero: se $f(x) = Ax + b$ è un isomorfismo affine di $\mathbb{R}^2$, allora

- se r e r' sono rette parallele, lo sono anche $f(r)$ e $f(r')$,
- se B è il baricentro di un triangolo Δ, allora $f(B)$ è il baricentro del triangolo $f(\Delta)$.

Mostra che la distanza, gli angoli, e l'area non sono concetti affini: esistono isomorfismi affini di $\mathbb{R}^2$ che modificano la distanza fra punti, gli angoli fra rette, e l'area delle figure piane.

Esercizio 2.39. Scrivi un'affinità f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_3$, $f(r_3) = r_1$ dove r_1, r_2, r_3 sono le rette

$$r_1 = \{y = 1\}, \qquad r_2 = \{x = 1\}, \qquad r_3 = \{x + y = -1\}.$$

Esercizio 2.40. Scrivi una affinità f di $\mathbb{R}^2$ senza punti fissi, tale che $f(r) = r'$ dove r e r' sono le rette

$$r = \{y = x\}, \qquad r' = \{y = -x\}.$$

Esercizio 2.41. Scrivi una affinità f di $\mathbb{R}^2$ che preserva l'area, senza punti fissi, e che non sia un'isometria.

3. Teorema spettrale

Esercizio 3.1. Verifica che le matrici seguenti hanno una base ortonormale di autovettori se e solo se sono simmetriche:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.2. Sia V con prodotto scalare definito positivo e $U \subset V$ un sottospazio qualsiasi. Mostra che la proiezione p_U su U e la riflessione Rif_U lungo U sono entrambi endomorfismi simmetrici di V.

Esercizio 3.3. Sia V con prodotto scalare definito positivo e $T\colon V \to V$ endomorfismo. Supponiamo che T sia contemporaneamente un endomorfismo simmetrico e una isometria. Mostra che T è una riflessione ortogonale lungo un sottospazio $U \subset V$. Chi è U?

Esercizio 3.4. Sia V con prodotto scalare definito positivo e $T\colon V \to V$ un endomorfismo simmetrico. Mostra che se $T^2 = T$ allora T è la proiezione ortogonale lungo un sottospazio $U \subset V$. Chi è U?

Esercizio 3.5. Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile, con tutti gli autovalori positivi. Mostra che esiste una radice quadrata B di A, cioè esiste una matrice quadrata B tale che $A = B^2$.

Se A è simmetrica, mostra che puoi chiedere che B sia simmetrica.

Esercizio 3.6. Mostra che $-I_n$ ha una radice quadrata se e solo se n è pari.

Esercizio 3.7. Siano g e h due prodotti scalari sullo stesso spazio V. Sia g definito positivo. Mostra che esiste una base ortogonale per entrambi.