Compito di Geometria e algebra lineare del 15 febbraio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale, sia g un prodotto scalare su V e $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare che sia una isometria rispetto al prodotto scalare g. Sia infine $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T.

a) Dimostrare che se g è definito positivo allora $\lambda = \pm 1$;
b) L'affermazione precedente rimane vera se si assume che g abbia segnatura $(1, 1, 0)$?

Esercizio 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli A^{100}.

Esercizio 3. Sia U un piano affine (non necessariamente passante per l'origine) di $\mathbb{R}^3$ e sia P_U la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U. Similmente se ℓ è una retta affine sia P_ℓ la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su ℓ.

a) Trovare A e b tali che $P_U(x) = Ax + b$ nel caso in cui U sia il piano $x + y + z = 1$.
b) Trovare A e b tali che $P_\ell(x) = Ax + b$ nel caso in cui ℓ sia la retta passante per e_1 ed e_2.
c) Fissato U come nel punto a) esiste una retta ℓ tale che la trasformazione $F(v) = P_U(v) + P_\ell(v)$ sia una isometria affine?

Esercizio 4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali. Siano q_1 e q_2 due prodotti scalari su V definiti nel modo seguente:

$$q_1(f, g) = f(a)g(a) + f'(b)g'(b) + f''(c)g''(c),$$
$$q_2(f, g) = f(a)g(a) + f(b)g(b) + f(c)g(c).$$

a) Calcolare la segnatura di q_1 al variare di a, b, c.
b) Per quali a, b, c il prodotto scalare q_2 è definito positivo?

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Svolto a lezione
b) No, non rimane vera. Se la segnatura è $(1, 1, 0)$, esiste una base v_1, v_2 rispetto alla quale il prodotto scalare è determinato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una isometria è determinata da una matrice M tale che ${}^{t}MSM = S$. Scrivo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e l'equazione diventa

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto, questa è equivalente a

$$\begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Non è necessario determinare tutte le soluzioni. Ne cerchiamo ad esempio una con $a = d$ e $b = c$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi basta risolvere $a^2 - b^2 = 1$. Ad esempio, con $b = 1$ e $a = \sqrt{2}$ otteniamo l'isometria

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Questa isometria ha autovalori $\sqrt{2} \pm 1$.

Esercizio 2. Diagonalizzando la matrice troviamo

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} A^{100} = MD^{100}M^{-1} = MDM^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^{100} & 2^{100} \\ 3^{100} & -2^{101} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{100} - 2^{100} & 3^{100} - 2^{100} \\ -2 \cdot 3^{100} + 2^{101} & -3^{100} + 2^{101} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

a) Con calcoli standard si ottiene

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Con calcoli standard si ottiene

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Esiste. Basta prendere una retta ℓ perpendicolare a U e si verifica che F è una traslazione, perché è del tipo $F(x) = x + b$.

Esercizio 4.

a) La matrice associata a q_1 nella base canonica $1, x, x^2$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2+1 & a^3+2b \\ a^2 & a^3+2b & a^4+4b^2+4 \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali sono 1, 1, 4 e quindi la segnatura è sempre $(3,0,0)$. Esiste anche un metodo alternativo per arrivare a questa conclusione, simile a quello descritto nel punto successivo.

b) Un polinomio $f \neq 0$ di grado $\leqslant 2$ ha al masimo due radici distinte. Se a, b, c sono distinti, allora f non può annullarsi in tutte e tre e quindi

$$q_2(f, f) = f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 > 0.$$

Segue che q_2 è definito positivo. Se invece a, b, c non sono distinti, ad esempio vale $a = b$, allora prendiamo $f(x) = (x-a)(x-c)$ e verifichiamo che

$$q_2(f) = f(a)^2 + f(a)^2 + f(c)^2 = 0$$

e quindi f è isotropo. Il prodotto scalare non è definito positivo.