Compito di Geometria e algebra lineare del 27 gennaio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo. Mostra che se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori per T con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tutti distinti, allora i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti.

Esercizio 2. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il piano definito dall'equazione $2x + z = 0$. Sia $p_W : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su W rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e sia $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotazione attorno all'asse z di $\pi/4$ radianti. Sia infine $T : W \longrightarrow W$ l'applicazione definita da $T(w) = p_W(R(w))$.

a) Scrivi la matrice associata a R e a p_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
b) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e g un prodotto scalare su V. Se W è un sottospazio di V indichiamo con $g_W : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di g a W ovvero il prodotto scalare di W definito da $g_W(w_1, w_2) = g(w_1, w_2)$ per ogni $w_1, w_2 \in W$.

a) Se g ha segnatura $(2, 2, 0)$ esiste un sottospazio W di dimensione 3 di V tale che g_W sia definito positivo? Motivare la risposta.
b) Se g ha segnatura $(2, 2, 0)$ esiste un sottospazio W di dimensione 3 di V tale che g_W abbia segnatura $(1, 1, 1)$? Motivare la risposta.

Soluzioni

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Un tentativo consiste nel scegliere una base $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 1)$ del piano e scrivere una matrice che contenga questi vettori come colonne, ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poi si verifica che questa A non è diagonalizzabile, quindi in questo caso il tentativo è riuscito. Un metodo più generale consiste nel costruire una composizione della proiezione ortogonale sul piano con una rotazione lungo il piano di un certo angolo.

Esercizio 3. Le matrici associate a p_W e a R sono

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la loro composizione è

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \\ 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

Prendiamo una base v_1, v_2 di W, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le loro immagini tramite $p_W \circ R$ sono

$$p_W(R(v_1)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}-8 \\ -5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\big((\sqrt{2}+8)v_1 - 5\sqrt{2}v_2\big),$$

$$p_W(R(v_2)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}(\sqrt{2}v_1 + 5\sqrt{2}v_2).$$

Quindi la matrice associata a $p_W \circ R$ nella base v_1, v_2 è

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+8 & \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per valutare la diagonalizzabilità possiamo ignorare il fattore $\frac{1}{10}$. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - (6\sqrt{2}+8)\lambda + 20 + 40\sqrt{2}.$$

Si vede che $\Delta < 0$ e quindi non è diagonalizzabile.

È anche possibile dare una dimostrazione geometrica del fatto che non ci sono autovettori per T.

Esercizio 4.

a) L'indice di positività 2 è la massima dimensione di un sottospazio su cui la restrizione sia definita positiva. Quindi la risposta è no.

b) La risposta è sì. Per il teorema di Sylvester, il prodotto scalare ha una base ortogonale v_1, v_2, v_3, v_4 rispetto a cui la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un sottospazio W con le proprietà richieste è dato da

$$W = \mathrm{Span}(v_1, v_3, v_2 + v_4).$$