Compito di algebra lineare del 27 giugno 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Determina tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$e^{2z} - e^z - 2 = 0.$$

Esercizio 2. Sia $n \geqslant 0$ un numero naturale fissato e $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio di tutti i polinomi di grado al più n. Considera l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definito come

$$T(p) = (x+1)p'$$

dove p' è la derivata del polinomio p.

(1) Determina gli autovalori di T.
(2) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 3. Data una retta $r \subset \mathbb{R}^3$ vettoriale (cioè passante per l'origine), indichiamo con $p_r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su r. Considera la retta $s \subset \mathbb{R}^3$ seguente:

$$s = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivi la matrice 3×3 che rappresenta p_s rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Sia $l \subset \mathbb{R}^3$ un'altra retta vettoriale. Considera l'endomorfismo $T = p_l \circ p_s$ di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determina la dimensione dell'immagine di T, al variare di l.
   (b) Mostra che T è sempre diagonalizzabile.

Esercizio 4. Considera al variare di $h \in \mathbb{R}$ la conica affine

$$C_h = \left\{ x^2 - 2hxy + \frac{1}{2}y^2 - 2hx + \frac{1}{2} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(1) Scrivi l'equazione omogenea che descrive il completamento proiettivo $\overline{C_h} \subset \mathbb{P}^2$ di C_h. Determina per quali h l'insieme $\overline{C_h} \subset \mathbb{P}^2$ non è vuoto.
(2) Per quali h la conica affine C_h è un'ellisse? un'iperbole? una parabola?
(3) Nei casi in cui C_h sia una ellisse o una iperbole, se ne determini il centro (che dipende da h).

Soluzioni

Esercizio 1. Sostituendo $w = e^z$ otteniamo $w^2 - w - 2 = 0$ che ha soluzioni $w = -1, 2$. Dobbiamo quindi risolvere separatamente le equazioni

$$e^z = -1, \qquad e^z = 2.$$

Otteniamo rispettivamente

$$z = \pi i + 2k\pi i, \qquad z = \ln 2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. Usiamo la base canonica $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Vediamo che

$$\begin{aligned} &T(1) = 0, \\ &T(x^k) = (x+1)kx^{k-1} = kx^k + kx^{k-1},\ \forall k > 0. \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T nella base canonica è una matrice triangolare superiore con elementi nella diagonale $0, 1, \ldots, n$. Gli autovalori sono proprio $0, 1, \ldots, n$ ed essendo distinti T è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Se $r = \mathrm{Span}(w)$, la proiezione su r è
$$p_r(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

(1) In coordinate, con la retta s otteniamo
$$p_s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}$$
quindi la matrice associata è
$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) L'immagine di una proiezione su una retta ha sempre dimensione 1, quindi l'immagine di T ha dimensione 1 o 0. La dimensione è zero solo quando l e s sono ortogonali.
(b) Quando l e s sono ortogonali, l'endomorfismo T è nullo e quindi è diagonalizzabile. Se non sono ortogonali, una base di autovettori è $\{v_1, v_2, v_3\}$ dove v_1 è un generatore di l, e v_2, v_3 sono una base del piano $s^\perp$.

Esercizio 4.

(1) L'equazione omogenea è
$$\overline{C_h} = \left\{ x_1^2 - 2hx_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2hx_1x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^2.$$
La matrice associata all'equazione è
$$\begin{pmatrix} 1 & -h & -h \\ -h & \frac{1}{2} & 0 \\ -h & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Il suo determinante è $\frac{1}{4} - h^2$. La matrice 2×2 in basso a destra è definita positiva, quindi $i_+ \geqslant 2$ per ogni h. Ne deduciamo che:
- se $h^2 > \frac{1}{4}$, la segnatura è $(2, 1, 0)$ e la conica è una circonferenza;
- se $h^2 < \frac{1}{4}$, la segnatura è $(3, 0, 0)$ e la conica è vuota;
- se $h = \pm\frac{1}{2}$, la segnatura è $(2, 0, 1)$ e la conica è un punto.

Quindi $\overline{C_h}$ non è vuoto precisamente per $|h| \geqslant \frac{1}{2}$.

(2) Ci interessano solo i casi $h^2 > \frac{1}{4}$ in cui il completamento è una circonferenza. La sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $\frac{1}{2} - h^2$. Quindi:
- se $h^2 > \frac{1}{2}$, la conica è una iperbole;
- se $\frac{1}{4} < h^2 < \frac{1}{2}$, la conica è una ellisse;
- se $h^2 = \frac{1}{2}$, la conica è una parabola.

(3) Il centro è il punto $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che soddisfa l'equazione
$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ -h & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$
Risolvendo troviamo
$$C = \frac{h}{1-2h^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2h \end{pmatrix}.$$