

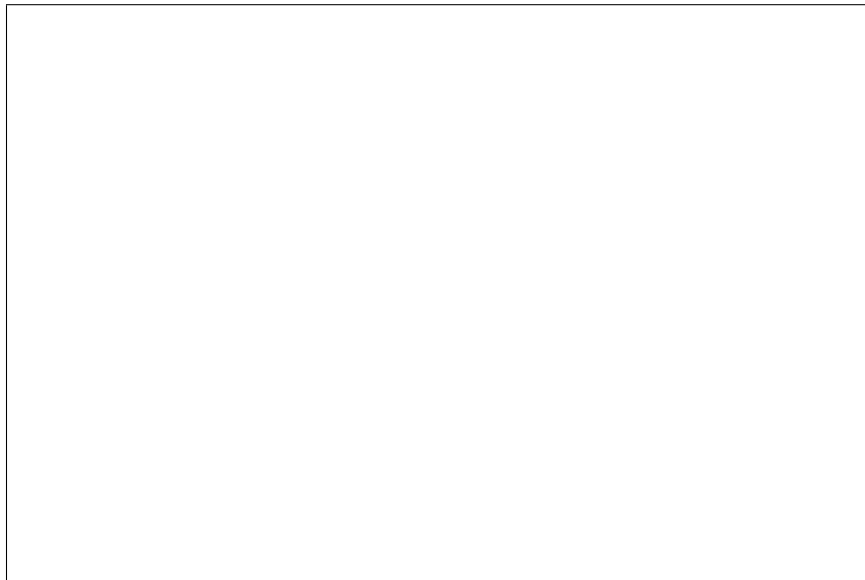
I
II

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.[11]

Si consideri la funzione $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = y^2 + x^2 + |x - y|$$



1. [1+eventuali] f è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in $(0, 0)$?

R: la funzione è continua perché è somma di funzioni continue.

La funzione è differenziabile nel dominio, salvo che sulla diagonale $\{x = y\}$. (verificare). Non è differenziabile in $(0, 0)$. (si consideri l'andamento della funzione lungo gli assi e lungo la diagonale)

2. [1] Si calcoli l'estremo inferiore di f . Ci sono minimi locali di f ?

R: l'estremo inferiore ovviamente è 0 c'è un minimo globale nell'origine.

3. [2] Si calcoli l'estremo superiore di f . Ci sono massimi locali di f ?

R: La funzione è continua, definita su un supporto compatto, quindi esiste almeno un massimo globale. Facilmente si verifica che questo massimo è 2 (raggiunto in 3 vertici del quadrato)

4. [1] Si considerino gli insiemi $C_l = \{f(x, y) = l\}$. Per quali valori di $l \geq 0$ questi sono curve regolari in ogni punto del dominio della funzione?

R: Per $l = 0$ l'insieme è ridotto a un punto. Per tutti gli $l > 2$ l'insieme è vuoto. Per gli altri valori di l si ha un punto non regolare sulla diagonale.

5. [2] Si determini se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) \leq c(x^2 + y^2)$ sul dominio indicato.

R: non esiste, si consideri il comportamento della funzione sugli assi

6. [2] Si consideri adesso, sempre sullo stesso dominio la successione di funzioni $f_n(x, y) = f\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)$

Questa ha un limite puntuale? Converte uniformemente su \mathbb{R}^2 ?

R: converge uniformemente a 0.

ESERCIZIO 2. [4]

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n^4} \sin(nx).$$

La serie converge ad una funzione f per ogni x ? (e dire in che senso)

La funzione f è monotona? (spiegare il perché della risposta).

R: La serie converge puntualmente in ogni punto, totalmente sugli insiemi limitati.

La funzione non è monotona, perché è pari e diversa da una costante. Infatti $f(0) = 0$ e $f(\pi/2) \neq 0$ (serie a segni alterni di modulo decrescente).

ESERCIZIO 3. [3]

L'ufficio statistico nazionale stima le seguenti probabilità di sopravvivenza per gli uomini:

- percentuale che un uomo viva almeno 70 anni: 80%
- percentuale che un uomo viva almeno 80 anni: 50%

Quale è la probabilità che un uomo viva almeno 80 anni sapendo che ha appena celebrato il suo 70esimo compleanno?

R:

$$E = \{\text{vivono} \geq 70\}$$

$$F = \{\text{vivono} \geq 80\}$$

Dobbiamo calcolare $P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$.

Si nota che $E \supset F$, per cui $P(F \cap E) = 1/2$.

Quindi $P(F|E) = 5/8$.