30-1-2015

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	C	B	B	A	C	B	C
II	B	B	D	B	C	C	B	C

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.[11]
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-|x|-|y|}$$

1. [1+eventuali] f è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in $(0, 0)$?

   R: la funzione è continua perche è composizione di funzioni continue. Fra queste la funzione $|x| + |y| \to \mathbb{R}$. Che è continua.

   La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 - \{x, y : |x|.|y| = 0\}$. (verificare). E' differenziabile in $(0, 0)$ ed il differenziale è nullo. La funzione NON é differenziabile per $(0, y), y \neq 0$ e $(x, 0), x \neq 0$.

2. [1] Si calcoli l'estremo inferiore di f. Ci sono minimi locali di f?

   R: l'estremo inferiore ovviamente è 0 c'è un minimo globale nell' origine.

3. [3] Si calcoli l'estremo superire di f. Ci sono massimi locali di f?

   R: La funzione é continua, positiva e

   $$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0.$$

   Il massimo nel primo quandrante é

   $$\sup_{x>0,y>0}(x^2+y^2)e^{-x-y} = 4e^{-2} = \sup_{x>0,y=0}(x^2+y^2)e^{-x-y} = \sup_{x=0,y>0}(x^2+y^2)e^{-x-y}$$

4. [1] Si considerino gli insiemi $C_l = \{f(x, y) = l\}$. Per quali valori di $l \geq 0$ questi sono curve regolari in ogni loro punto?

   R: Per $l = 0$ C_l è un punto. Per $l > 0$, C_l ha 4 punti non regolari (punti sui due assi).

5. [2] Si determini se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) \leq ce^{-x^2-y^2}$

   R: tale c non esiste, si consideri il comportamento di $f(x, y)e^{x^2+y^2}$

6. [3] Si consideri adesso la successione di funzioni $f_n(x, y) = f(nx, ny)$

   Questa ha un limite puntuale? Converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$?

R: Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = 0$$

il limite puntuale ovviamente è 0. Non converge uniformemente.

ESERCIZIO 2. [1+4] Determinare se il seguente campo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è conservativo e eventualmente trovarne il potenziale

$$F = (4x^3y^4 + 2x + 1)e_1 + (4y^3x^4 + 2y + 1)e_2.$$

Soluzione:$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 16x^3y^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Quindi il campo è conservativo. $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi esiste il potenziale U. Troviamolo.

Sappiamo che $\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3y^4 + 2x + 1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$. Dunque $U = \int 4x^3y^4 + 2x + 1\ dx$ ma anche $U = \int 4y^3x^4 + 2y + 1\ dy$

Partiamo dalla prima, otteniamo

$$\begin{aligned} U &= \int 4x^3y^4 + 2x + 1\ dx = \\ &\quad x^4y^4 + x^2 + x + h(y) \end{aligned}$$

Cosi $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^4 + x^2 + x + h(y)) = 4y^3x^4 + h'(y)$ ma anche $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$ quindi $h'(y) = 2y + 1$ da cui $h(y) = y^2 + y + c$ quindi $U(x,y) = x^4y^4 + x^2 + x + y^2 + y + c$

ESERCIZIO 3. [3]

Il tribunale di Pisa condanna un imputato colpevole nel 90 % dei casi e un imputato innocente nell'1 % dei casi. L'80 pecento degli imputati nel tribunale di Pisa é colpevole, il restante 20 percento innocente. Calcolare la probabilitá che un imputato preso a caso venga assolto.

Soluzione. Sia Ω l'insieme degli imputati. Sia $A \subset \Omega$ l'insieme di quelli condannati. Sia $B \subset \Omega$ l'insieme di quelli colpevoli, B^c l'insieme di quelli innocenti. Vogliamo calcolare $p(A)$, sapendo che

$$p(B) = 0,8,\ p(B^c) = 0,2,\ p(A \setminus B) = 0,9, p(A \setminus B^c) = 0,01.$$

Si ha

$$p(A) = p(A \setminus B)p(B) + p(A \setminus Bc)p(Bc) = 0,9 \times 0,8 + 0,01 \times 0,2 = 0,722.$$

La probabilitá che un imputato preso a caso venga assolto ´e

$$1 - 0,722 = 0,278.$$

■