

				30-1-2015				
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	D	D	C	B	A	A	B	A
II	B	C	D	B	A	A	B	B

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

**ESERCIZIO 1.[11]**

Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-|x|-|y|}$$

1. [1+eventuali]  $f$  è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

R: la funzione è continua perché è composizione di funzioni continue. Fra queste la funzione  $|x| + |y| \rightarrow \mathbb{R}$ . Che è continua.

La funzione è differenziabile in  $\mathbb{R}^2 - \{x, y : |x| \cdot |y| = 0\}$ . (verificare). E' differenziabile in  $(0, 0)$  ed il differenziale è nullo. La funzione NON è differenziabile per  $(0, y), y \neq 0$  e  $(x, 0), x \neq 0$ .

2. [1] Si calcoli l'estremo inferiore di  $f$ . Ci sono minimi locali di  $f$ ?

R: l'estremo inferiore ovviamente è 0 c'è un minimo globale nell' origine.

3. [3] Si calcoli l'estremo superiore di  $f$ . Ci sono massimi locali di  $f$ ?

R: La funzione è continua, positiva e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = 0.$$

Il massimo nel primo quadrante è

$$\sup_{x>0, y>0} (x^2+y^2)e^{-x-y} = 4e^{-2} = \sup_{x>0, y=0} (x^2+y^2)e^{-x-y} = \sup_{x=0, y>0} (x^2+y^2)e^{-x-y}$$

4. [1] Si considerino gli insiemi  $C_l = \{f(x, y) = l\}$ . Per quali valori di  $l \geq 0$  questi sono curve regolari in ogni loro punto?

R: Per  $l = 0$   $C_l$  è un punto. Per  $l > 0$ ,  $C_l$  ha 4 punti non regolari (punti sui due assi).

5. [2] Si determini se esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y) \leq ce^{-x^2-y^2}$

R: tale  $c$  non esiste, si consideri il comportamento di  $f(x, y)e^{x^2+y^2}$

6. [3] Si consideri adesso la successione di funzioni  $f_n(x, y) = f(nx, ny)$

Questa ha un limite puntuale? Converte uniformemente su  $\mathbb{R}^2$ ?

R: Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = 0$$

il limite puntuale ovviamente è 0. Non converge uniformemente.

**ESERCIZIO 2.** [1+4] Determinare se il seguente campo  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è conservativo e eventualmente trovarne il potenziale

$$F = (4x^3y^4 + 2x + 1)e_1 + (4y^3x^4 + 2y + 1)e_2.$$

**Soluzione:**  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 16x^3y^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ . Quindi il campo è conservativo.  $\mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso, quindi esiste il potenziale  $U$ . Troviamolo.

Sappiamo che  $\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3y^4 + 2x + 1$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$ . Dunque  $U = \int 4x^3y^4 + 2x + 1 dx$  ma anche  $U = \int 4y^3x^4 + 2y + 1 dy$

Partiamo dalla prima, otteniamo

$$U = \int 4x^3y^4 + 2x + 1 dx = x^4y^4 + x^2 + x + h(y)$$

Così  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^4 + x^2 + x + h(y)) = 4y^3x^4 + h'(y)$  ma anche  $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y + 1$  quindi  $h'(y) = 2y + 1$  da cui  $h(y) = y^2 + y + c$  quindi  $U(x, y) = x^4y^4 + x^2 + x + y^2 + y + c$

**ESERCIZIO 3.** [3]

Il tribunale di Pisa condanna un imputato colpevole nel 90 % dei casi e un imputato innocente nell'1 % dei casi. L'80 per cento degli imputati nel tribunale di Pisa è colpevole, il restante 20 per cento innocente. Calcolare la probabilità che un imputato preso a caso venga assolto.

**Soluzione.** Sia  $\Omega$  l'insieme degli imputati. Sia  $A \subset \Omega$  l'insieme di quelli condannati. Sia  $B \subset \Omega$  l'insieme di quelli colpevoli,  $B^c$  l'insieme di quelli innocenti. Vogliamo calcolare  $p(A)$ , sapendo che

$$p(B) = 0,8, \quad p(B^c) = 0,2, \quad p(A \setminus B) = 0,9, \quad p(A \setminus B^c) = 0,01.$$

Si ha

$$p(A) = p(A \setminus B)p(B) + p(A \setminus B^c)p(B^c) = 0,9 \times 0,8 + 0,01 \times 0,2 = 0,722.$$

La probabilità che un imputato preso a caso venga assolto è

$$1 - 0,722 = 0,278.$$

■