9-1-2015

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	C	B	A	A	C	B	C
II	B	B	C	A	C	C	B	C

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.[6]
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \min(x^2, y^2)$$

1. [1+eventuali] f è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti? è differenziabile in $(0, 0)$?

   R: la funzione è continua perche è composizione di funzioni continue. Fra queste la funzione $\min : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Che è continua.

   La funzione NON è differenziabile in $\mathbb{R}^2 - \{x, y : |x| = |y| \neq 0\}$. (verificare). E' differenziabile in $(0, 0)$ ed il differenziale è nullo.

2. [1] Si calcoli il sup di f. Ci sono minimi locali di f?

   R:il sup ovviamente è ∞ c'è un minimo globale in ogni punto degli assi.

3. [2] Si consideri la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$. Calcolare se esiste il limite $\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t))$

   R: al crescere di t la curva $f(\gamma(t))$ interseca infinite volte gli assi, in cui la funzione vale 0. Interseca infinite volte anche le diagonali, su cui vale$\frac{t^2}{2} \to \infty$. Quindi il limite non esiste.

4. [1] Si considerino gli insiemi $C_l = \{f(x, y) = l\}$. Per quali valori di $l \geq 0$ questi sono curve regolari in ogni loro punto?

   R: Per $l = 0$ C_l è l'unione degli assi (e l'intersezione avviene nei minimi) per cui non si ha una curva regolare. Per $l > 0$ le C_l è unione di 8 semirette parallele ad uno degli assi, che si uniscono a coppie in 4 punti non regolari (punti che sono di non differenziabilità per f).

5. [2] Si determini se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) \leq c\sqrt{x^2 + y^2}$

   R: tale c non esiste, si consideri il comportamento di f sulle diagonali...

6. [3] Si consideri adesso la successione di funzioni $f_n(x, y) = \frac{1}{n} f(x, y)$

   Questa ha un limite puntuale? Converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$? Converge uniformemente su qualche insieme illimitato?

R: il limite puntuale ovviamente è 0. Non converge uniformemente (ancora considerare il comportamento sulle diagonali).

Converge uniformemente su alcuni insiemi illimitati, per esempio $\{x, y : |y| \leq 1\}$.

ESERCIZIO 2. [4]

- Si calcoli il volume del solido S costituito dai punti che soddisfano le seguenti condizioni

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y^2\}$$

- Si calcoli $\int_D \min(x^2, y^2)\ dxdy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

R: Il volume di S è dato da

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 dydx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{12}.$$

Da cui $\int_D \min(x^2, y^2)\ dxdy = 8 * \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

ESERCIZIO 3. [3]

Un' azienda organizza due progetti, A e B. Si stima che la probabilità che A abbia successo sia di $\frac{3}{4}$; la probabilità che B abbia successo sia di $\frac{1}{2}$; la probabilità che entrambi i progetti abbiano successo sia di $\frac{7}{16}$.

- La riuscita dei due progetti può essere considerata indipendente?
- Quale è la probabilità che almeno uno dei progetti abbia successo?

(si risponda spiegando con cura i passaggi fatti)

R: Chiamiano per semplicità A e B gli eventi corrispondenti al successo dei due progetti.

Si ha che se i A e B fossero indipendenti, la probabilità della riuscita di entrambi sarebbe

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{7}{16}$$

per cui i due eventi non sono indipendenti.

La probabilità che almeno uno abbia successo è data da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{16} = \frac{13}{16}.$$