2-7-2014

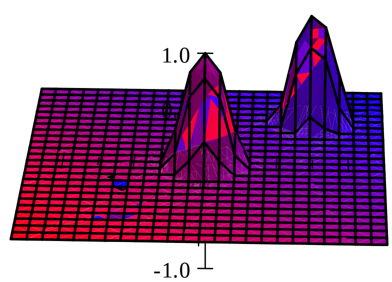
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	C	D	C	A	B	D	A
II	B	C	B	A	C	C	C	A
III								
IV								

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.[6]

Si consideri le seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 1 - x^2 - y^2 \\
g(x, y) &= 1 - (x + 3)^2 - (y + 3)^2 \\
h(x, y) &= \max(f(x, y), g(x, y), 0)
\end{aligned}
$$



1. [1] h è una funzione continua? è differenziabile in tutti i punti?

   R: la funzione è continua perche è composizione di funzioni continue. Fra queste la funzione $\max : R^3 \to R$. Che è continua. La funzione NON è differenziabile nei punti dove $g = 0$ o $f = 0$ (provare a capirlo, per esempio restingendo il dominio ad opportune rette)

2. [1] Si calcoli il sup di h Ci sono massimi locali di h?

   R:Ci sono 2 massimi locali che sono i massimi dei due paraboloidi e il loro valore coincide con il sup della funzione,che fuori dai paraboloidi fa 0. Il sup quindi è 1.

3. [1] Si consideri la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$. Calcolare il limite $\lim_{t\to\infty} h(\gamma(t))$

   R: la curva per t abbastanza grande non interseca più i due dischi dove $h > 0$. Quindi i valori che assume $h(\gamma(t))$ saranno definitivamente 0 da cui il limite è 0.

4. [1] Si considerino gli insiemi $C_l = \{h(x,y) = l\}$. Per quali valori di l questi sono curve regolari?

   R: Visto che $\sup h = 1, \inf h = 0$ Ci sono intersezioni non vuote per $h \in [0,1]$. Queste non sono curve regolari per $h = 0$ e $h = 1$ (i valori critici) per gli altri valori l'intersezione con il piano ad altezza h è trasversale e quindi si hanno curve regolari.

5. [2] L'integrale $\int_{R^2 - \{(0,0)\}} h(x,y)\ dxdy$ è finito?

   R: Si tratta di integrare una funzione continua su un dominio compatto, quindi l'integrale è finito (insomma, la funzione è integrabile, il sup è 1, l'inf è zero e fuori da un certo disco limitato tutto fa zero).

6. [4](facoltativo) Si consideri adesso la successione di funzioni $h_n(x,y) = \max(\frac{1}{n} f(x,y), \frac{1}{n^2} g(x,y), 0)$. Questa ha un limite puntuale? uniforme?

   La serie $\sum_1^\infty h_n(x,y)$ converge in qualche senso?

R: (cenno) la successione di funzioni converge unformemmente a zero, la serie non converge nel disco dove $f > 0$.

ESERCIZIO 2. [6]
Si considerino $v_c(t), x_c(t)$ funzioni soddisfacenti il seguente sistema

$$\begin{cases} v' = -c \\ x' = v \\ x(0) = 0, v(0) = 1 \end{cases}$$

che dipende da $c \geq 0$.

1. [1]E' un sistema autonomo? Esistono uniche $v_c(t), x_c(t)$ per ogni tale c?

   R: Il sistema è autonomo, tutto è lipschitziano, le soluzioni sono uniche (ed anche facili da trovare, come molti hanno fatto).

2. [1]Calcolare se esiste $\lim_{t\to\infty} x_c(t)$ per ogni $c \geq 0$

   R: Il limite fa $-\infty$

3. [2]Fare un disegno qualitativo delle traiettorie nel piano delle fasi x, v

   R: (parabole)

4. [2] esiste una funzione $l(t)$ tale che $l(t) = \lim_{c \to 0} x_c(t)$? per ogni $t \geq 0$? (c'è una convergenza uniforme?)

   R: il limite esiste (moto rettilineo uniforme), la convergenza non è uniforme (perché per ogni $c \neq 0$ comunque la traiettora è una parabola e prima o poi si discosterà dalla retta limite)

ESERCIZIO 3. [5]

Si supponga che due giocatori di bocce *Angelo* e *Bruno*, lancino la loro boccia un in modo che possiamo considerare casuale e uniformemente distribuito sul campo, che sarà approssimato come l' intervallo $[0, 1]$. (nella realtà sarà un rettangolo lungo e stretto e i lanci non uniformemente distribuiti, ma sono sicuro che prererite un esercizio più semplice).

Si supponga che il pallino sia in 1 e che i giocatori facciano un solo lancio ciascuno. Si supponga che i due lanci siano indipendenti.

Si risponda spiegando e giustificando i passaggi che vengono fatti.

a) Quale è la probabilità che Bruno vinca?

b) Quale è la probabilita che Bruno vinca, sapendo che Angelo ha già lanciato in $[\frac{3}{4}, 1]$?

Cenno soluzione: