2-7-2014

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	B	C	D	D	B	A	D	A
II	A	C	B	D	B	C	A	A
III	A	C	B	C	C	A	C	C
IV								

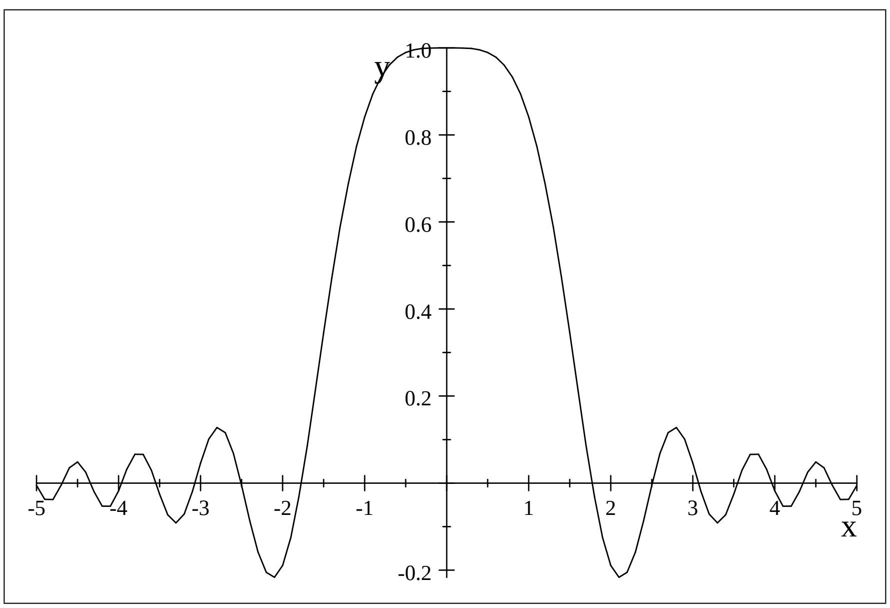
Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.[6+3]
Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da:

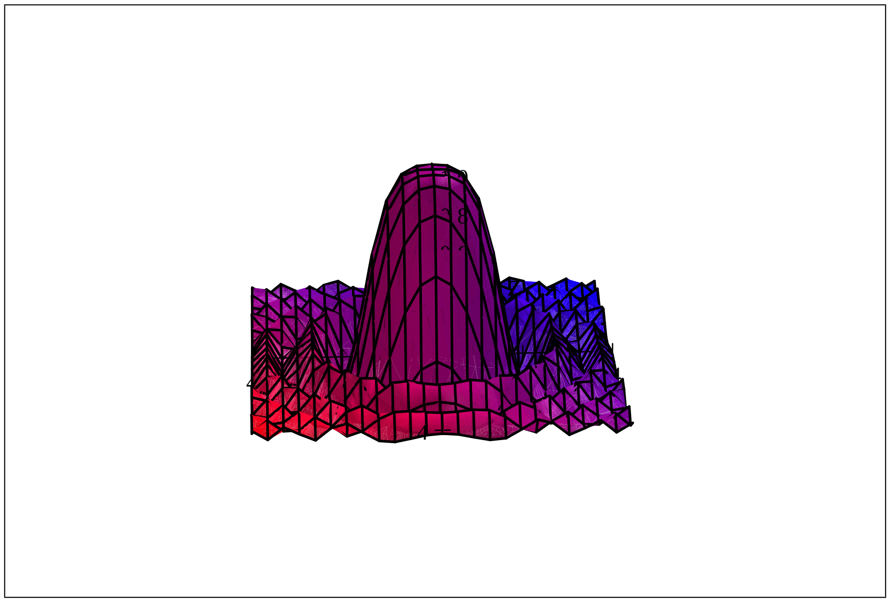
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

1. Si calcoli il sup di f .

   R: Come suggerito in classe, la funzione $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ ha un' evidente simmetria radiale. Lo studio del comportamento della funzione si "riduce" a quello della funzione $g(r) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$il cui grafico è rappresentato sotto:



per cui il grafico di f appare:



$\sup f = \sup g$ (perché?) e quest ultimo è uguale a 1 (perché?)

2. Ci sono massimi locali di f?

   R: Il punto $(0,0)$ non è nel dominio e quindi non è un massimo locale, ce ne sono però infiniti altri (deboli) in tutti i punti corrisponcenti alle circonferenze concentriche relative ai raggi per cui $g(r)$ è un massimo locale.

3. Si consideri la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$. Calcolare il limite $\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t))$

   R: Si nota che $|\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}| \leq \frac{1}{x^2+y^2}$ per cui, $\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)) = 0$. (lungo la curva $x^2+y^2 \to \infty$, verificare)

4. Si considerino gli insiemi $C_h = \{f(x,y) = h\}$. Per quali valori di h questi sono curve regolari? esistono tali valori? (non è necessario calcolarli esattamente)

   R: gli insiemi C_h sono unioni di circonferenze di raggi corrispondenti alle soluzioni di $g(r) = h$, oppure l'insieme vuoto.

   Le curve sono regolari in caso di intersezione trasversale, non lo sono quando h è un valore critico di g.

5. Si condideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

   $$F = \nabla f.$$

   F è conservativo?

   R: Ovvio.

6. L'integrale $\int_{R^2-\{(0,0)\}} |\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}| \; dxdy$ è finito?

   R: Osservando che $\int_{R^2-\{(0,0)\}} |\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}| = \int_0^\infty \frac{\sin(r^2)}{r} dr = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \infty$

7. (facoltativo)

   Si consideri il sistema $\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

   Ha punti fissi? stabili, instabili? Le sue soluzioni sono tutte curve limitate?

R: i punti fissi sono i punti in cui il gradiente è nullo, quindi i punti critici di f. Come osservato ce ne sono infiniti...

I massimi locali sono stabili, gli altri instabili. Le soluzioni sono tutte limitate, e congiungono due punti critici di f.

ESERCIZIO 2. [6]

Un contadino sparge una certa quantità di terricio su $\mathbb{R}^2$ ogni giorno usando uno strumento che distribuisce al giorno n $(n \in \{1, 2, ...\}$) una quantità che nel punto (x, y) ha un' altezza

$$h_n(x,y) = \frac{1}{\pi 2^{-n}} e^{-(x^2+y^2)}.$$

(la formula contiene un evidente svista, risolvo comunque l'esercizio per come è stato dato)

Il terriccio si accumula formando un mucchio la cui altezza cresce nel tempo.

1. si calcoli il volume del terriccio sparso ogni giorno.

   R:$V_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi 2^{-n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = 2^n$

2. si calcoli l'altezza massima del mucchio e si dica se questa resta limitata nel tempo.

   R: Al tempo n , sul punto (x, y) il mucchio ha un altezza $H_n(x, y) = \sum_1^n \frac{1}{\pi 2^{-n}} e^{-(x^2+y^2)}$
   visto che c'è 2^n a moltiplicare e non a dividere, ovviamente l'altezza è illimitata

3. si supponga adesso che il mucchio frani se in qualche punto c'è una direzione in cui la pendenza del mucchio (la derivata direzionale) supera in modulo il valore $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Ci sarà una frana?

   R:ovviamente si per quanto detto sopra...

ESERCIZIO 2. [3]

Un calciatore sa che la sua probabilità di fare gol su calcio di rigore è del 60% e il risultato di ogni tiro è indipendente dagli altri.

1. Quale è la probabilità di fare gol per la prima volta dopo 5 tiri?

   $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right)$

2. Quale è la probabilità di fare almeno un gol nei tiri dal quinto al decimo, sapendo che nei primi cinque tiri non ci sono stati gol?

   I tiri sono indipendenti, quindi sapere cosa è successo prima non influenza le probabilià dei tiri presi in considerazione.

   pe cui la risposta è $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^5$