6-6-2014

Si ricorda che le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1.

Exercise 1 *1) Si consideri il seguente campo vettoriale:* $F(x,y,z) = ye_1 + ze_2 + xe_3$. *Si consideri il quarto di disco* $S = \{x = 0, z \geq 0, y \geq 0, z^2 + y^2 \leq 1\}$. *Si calcoli il lavoro fatto del campo lungo il bordo* ∂S *percorso in quel senso li che era scritto sul testo....*

2) Si consideri un' isometria $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e la superficie* $AS = \{Ax\ ,\ x \in S\}$. *E' possibile che il lavoro fatto lungo* ∂AS *sia maggiore di quello calcolato in precedenza?*

R: 1) Si usa il teorema di Stokes, $rot(F) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi il lavoro $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_S rot(F) \cdot n\ dS$ bisogna scegliere il vettore normale a S compatibile con il senso di rotazione assegnato. Questo vettore è $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per cui $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_S rot(F) \cdot n\ dS = -\frac{\pi}{4}$.

2) Per quanto visto, il rotore è costante ed il lavoro dipende solo da $rot(F) \cdot n$ e dall area della superficie, che è ovviamente conservata. $rot(F) \cdot n$ è massimo quando la normale punta nella direzione $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1. \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 2.

Exercise 2 *Si considerino i seguenti problemi di Cauchy dipendenti da un parametro* n

$$\begin{cases} y' = y(\frac{1}{n}e^{-t} - y) \\ y(0) = \frac{1}{2n} \end{cases}$$

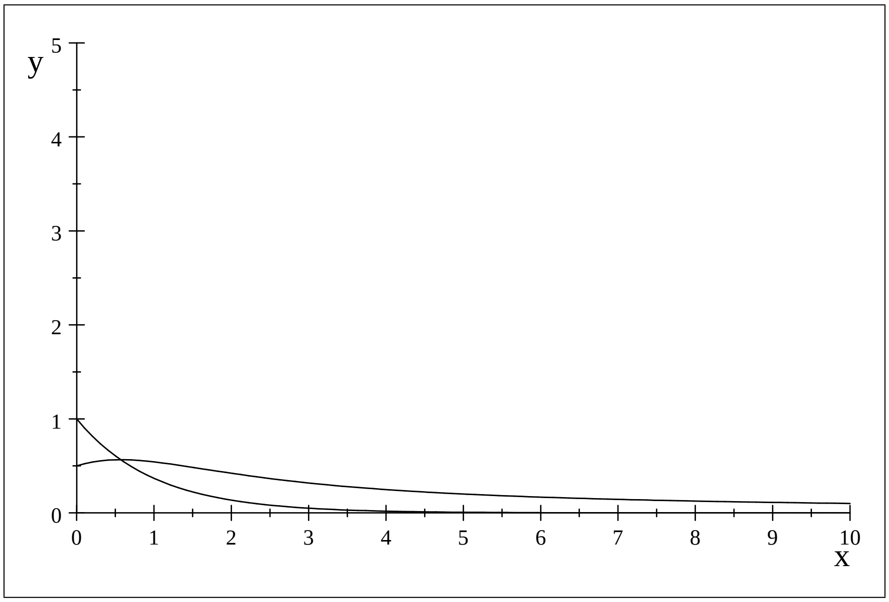
sia $y_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *una soluzione del problema di cui sopra con parametro* n.

1. *La soluzione è unica? Si prolunga per ogni* $t \in \mathbb{R}^+$ *?*
2. *La soluzione è crescente, decrescente? Se ne disegni un grafico approssimativo.*
3. *la successione* $y_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *converge puntualmente o uniformemente a qualche limite? dimostrarlo.*

Risposte (cenno): Il secondo membro dell' equazione è Lipschitz, quindi la soluzione è unica. Per $t \in \mathbb{R}^+$, la soluzione parte crescente e diventa decrescente quando incrocia $\frac{1}{n}e^{-t}$ resta decrescente e non può diventare negativa perché

$y = 0$ è soluzione. Quindi la soluzione resta limitata e quindi prolungabile indefinitamente.

La successione y_n è crescente fino a che non incontra $\frac{1}{n}e^{-t}$ qui raggiunge il suo massimo. Quindi $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq y_n \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{1}{n}e^{-t} = \frac{1}{n}$. Da cui, y_n converge uniformemente a 0.



,**ESERCIZIO 3.**

Exercise 3 *La misura (in metri quadri) della superficie che si può ricoprire con una confezione di vernice e' descritta da una variabile aleatoria* ***uniformemente distribuita nell intervallo*** $[25, 26]$ *Sia poi* Y *la variabile aleatoria che rappresenta la superficie che si può ricoprire usando 2 confezioni di vernice (si suppone l'indipendenza delle quantità fra una confezione e l'altra).*

1. *calcolare il valore atteso e la varianza di* Y*.*
2. *calcolare la probabilità che le 2 confezioni siano sufficienti per ricoprire una superficie di* 51*.*

Risp:

1)Visto che $Y = X_1 + X_2$ è somma di 2 variabili aleatorie identicamente distribuite, il valore atteso è $E[Y] = 2 \cdot 25.5 = 51$ Analogamente $var(Y) = 2var(X_i) = \frac{1}{6}$.

2) Bisogna calcolare $P(Y \geq 51)$. Essendo le due variabili indipendenti e uniformemente distribuite, possiamo rappresentare lo spazio delle coppie (X_1, X_2) come un quadrato $[25, 26]\times$ $[25, 26]$, su cui è distribuita una probabiltà uniforme. La probabilità richiesta è quella della parte di quadrato sopra la diagonale $X_1 + X_2 \geq 51$. Quindi $P(Y \geq 51) = \frac{1}{2}$.