Corso di Ingegneria Biomedica - Algebra Lineare
Compito III, 14-7-2012

TEST: Risposta giusta=3 punti. Risposta sbagliata=-1 punti. La soluzione va consegnata compilata in modo univocamente comprensibile. **Si prega di scrivere il nome su ogni foglio.**

---

1 - Si consideri l'insieme A di tutte le applicazioni lineari: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dotato della usuale operazione di somma fra due applicazioni.

A - □ A è uno spazio vettoriale reale di dimensione 5.

B - □ * A è uno spazio vettoriale reale di dimensione 6.

C - □ A non è uno spazio vettoriale, in quanto le applicazioni in A non possono essere biunivoche.

D - □ A non è uno spazio vettoriale in quanto le applicazioni in A non possono essere surgettive.

2 - Considera la trasformazione del piano che consiste nell applicare una rotazione di 46 gradi in senso antiorario attorno all'origine, e in seguito una simmetria rispetto all asse x.

A - □ $*$ La trasformazione è lineare e iniettiva.

B - □ La trasformazione è lineare e non iniettiva perchè la retta resta fissa.

C - □ La trasformazione non è lineare perché non è una matrice.

D - □ Nessuna delle precedenti.

3 - Sia V l'insieme dei polinomi a coefficienti reali, di grado ≤ 2, nella variabile t. Sia $A : V \to V$ la funzione $A(p(t)) = t^2\, p(3)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A - □ V non è uno spazio vettoriale.

B - □ V è uno spazio vettoriale, A non è una funzione lineare ma lo sarebbe stata se $A(p(t)) = t\, p(3)$. .

C - □ $* A$ è lineare, ma non è invertibile.

D - □ Nessuna delle precedenti.

4 - Sia V l'insieme dei polinomi a coefficienti reali, di grado ≤ 3, nella variabile t. Sia $A : V \to V$ la funzione $A(p(t)) = t(p(3))^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A - $\square$ V non è uno spazio vettoriale.

B - $\square$ $*V$ è uno spazio vettoriale, A non è una funzione lineare. .

C - $\square$ A è lineare, ma non è invertibile.

D - $\square$ A è lineare e invertibile.

5 - Si consideri il seguente sistema $Ax = y$ con $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, e $y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A - $\square$ Il sistema ha un' unica soluzione.

B - $\square$ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1.

C - $\square$ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 2.

D - $\square*$ Il sistema non ha soluzioni.

6 - Calcolare l'inversa di $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, inverse: , Essa è:

A - $\square$ $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

B - $\square$ $\begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

C - $\square$ $*$ $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

D - $\square$ nessuna di queste.

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome:$ ______________________; $Cognome:$ ________________________

Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere **scritta in bella copia nell'apposito spazio su questi fogli**. Le risposte devono essere brevemente giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (7 pt)

-Calcolare il rango della seguente matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{vmatrix}$$

,

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

- E' vero che il determinante di una matrice a blocchi $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ soddisfa $\det \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A \det B$ qualunque siano le matrici A, B, C (con A, B quadrate)?

Dimostrare o fornire un controesempio (ricordarsi delle proprietà fondamentali del determinante).

Accenno di soluzione:

Determinante: $3\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3\lambda + 3)$ per $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$ rango 5 per $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, rango 4.

continua

$COMPITO\ I-\ Nome:$ ______________________; $Cognome:$ ________________________

ESERCIZIO 2 (7 pt)

Si consideri l'applicazione F:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $F(\begin{vmatrix} x_1 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 \\ x_1 \\ ... \\ x_{n-1} \end{vmatrix}$

(p.es. $F(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$.

-E' lineare? è invertibile?

-in caso, se ne trovi la matrice e si calcoli il rango di F e di $F^n = F \circ ... \circ F$.

-Si consideri l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^n | F^3(x) = 0\}$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$? in caso affermativo, di che dimensione?

Accenno di soluzione:

l'applicazione è lineare non invertibile, non è iniettiva.

Applicando la funzione ai vettori della base canonica si vede che la matrice è della forma $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0. & 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}$ (matrice $n \times n$)

$F^n(v) = 0$ per tutti i v, quindi il rango di F^nè 0.

S è uno sottospazio vettoriale di dimensione 3, infatti è lo spazio del vettori del tipo $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$

continua