Corso di Ingegneria Biomedica - Algebra Lineare
Compito III, 14-7-2012

TEST: Risposta giusta=3 punti. Risposta sbagliata=-1 punti. La soluzione va consegnata compilata in modo univocamente comprensibile. **Si prega di scrivere il nome su ogni foglio.**

---

1 - Si consideri l'insieme di tutte le matrici 2×3 a coefficienti reali. Esse:
A - ☐ Formano uno spazio vettoriale reale di dimensione 5.
B - ☐ Formano uno spazio vettoriale reale di dimensione 6.
C - ☐ Non sono uno spazio vettoriale, dato che non sono matrici quadrate.
D - ☐ Non sono uno spazio vettoriale, che può essere solamente costituito da vettori colonna.

2 - Considera la trasformazione del piano che consiste in una rotazione di 45 gradi in senso antiorario attorno all'origine, e un riscalamento di un fattore 2 (dopo la rotazione si moltiplica il vettore ottenuto per 2). Tale trasformazione:
A - ☐ Può essere espressa come matrice 2×2, e il kernel della matrice ha dimensione 2.
B - ☐ Può essere espressa come matrice 2×2, e il kernel della matrice ha dimensione 1.
C - ☐ Può essere espressa come matrice 2×2, e il kernel della matrice ha dimensione 0.
D - ☐ Non può essere espressa come matrice 2×2.

3 - Sia V l'insieme dei polinomi a coefficienti reali, di grado ≤ 2, nella variabile t. Sia $A : V \to V$ la funzione $A(p(t)) = t + p(3)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
A - ☐ V non è uno spazio vettoriale.
B - ☐ V è uno spazio vettoriale, ma A non è una funzione lineare.
C - ☐ A è lineare, ma non è invertibile.
D - ☐ A è lineare e invertibile.

4 - Si consideri la matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Una base dell'immagine è data dai vettori che costituiscono le colonne:

A - ☐ 1 e 2.
B - ☐ $1, 2, 3$.
C - ☐ $1, 2, 4$.
D - ☐ Tutte quante.

5 - Si consideri il seguente sistema $Ax = y$ con $A = \begin{vmatrix} 3 & -13 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, e $y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A - ☐ Il sistema ha un' unica soluzione.
B - ☐$*$ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1.
C - ☐ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 2.
D - ☐ Il sistema non ha soluzioni.

6 - Calcolare l'inversa di $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, Essa è:

A - ☐ $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$
B - ☐ $* \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$
C - ☐ $\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$
D - ☐ nessuna di queste.

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome$: ______________________; $Cognome$: ________________________

Esercizi a risposta aperta: la soluzione deve essere scritta in bella copia nell apposito spazio su questi fogli. Le risposte devono essere brevemente giustificate. Non sono considerate valide risposte date senza giustificazione.

ESERCIZIO 1 (7 pt)

Sia V l'insieme dei polinomi in t di grado ≤ 2. Sia $A : V \to V$ la funzione definita come $A(p(t)) = \tilde{p}(t)$, dove $\tilde{p}(t) = t^2 p(t^{-1})$ è il polinomio coniugato, ottenuto ribaltando i coefficienti (se $p(t) = at^2 + bt + c$, allora $\tilde{p}(t) = ct^2 + bt + a$).

- Si dimostri che A è lineare, e si scriva una matrice che la rappresenta.
- Si calcino gli autovalori di A, e si determini se è diagonalizzabile.

RISPOSTA (accenno)

Esercizio standard: con i soliti calcoli si dimostra che è lineare.

Si considera la base $\{1, t, t^2\}$. Si ha che

$A(1) = t^2$, $A(t) = t$, $A(t^2) = 1$. Quindi la matrice associata é $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, gli autovalori sono 1 e -1. 1 ha molteplicità geometrica 2 e -1 ha molteplicità geometrica 1. Quindi si diagonalizza.

COMPITO I – *Nome* : ______________________; *Cognome* : ________________________

ESERCIZIO 2 (7 pt)
Si consideri una successione di numeri reali $\{x_n\}$ tale che $x_n = 2x_{n-1} - 3x_{n-2}$.

- Si scriva una matrice A che permette i calcolare il vettore $\begin{vmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{vmatrix}$ conoscendo il vettore $\begin{vmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{vmatrix}$.

  (una matrice A tale che $\begin{vmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{vmatrix}$)

- Si calcolino gli autovalori di A, e si trovi una matrice B tale che $B^3 = A$.

RISPOSTA (accenno)
L' ipotesi fatta sopra permette di scrivere il seguante sistema $\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - 3x_{n-2} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \end{cases}$
che visto in fiorma vettoriale é equivalente a $\begin{vmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{vmatrix}$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

L' esercizio sarebbe continuato come in un compito precedente, ma per una svista gli autovalori sono complessi e nessuno ha completato l'esercizio. Per questo é stata valutata come soluzione corretta qualsiasi soluzione che impostasse il procedimento.

Per curiosità, accenniamo che nel campo complesso la soluzione sarebbe stata il prodotto delle seguenti matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} i\sqrt{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} i\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{2} i\sqrt[6]{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \\ \frac{1}{2}3^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} i 3^{\frac{2}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{c} \frac{1}{2}3^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \\ \frac{1}{2} i 3^{\frac{2}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} i\sqrt[6]{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{2}\right) \end{array} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} i\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} i\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} i\sqrt{2} & \frac{3}{4} i\sqrt{2} \end{vmatrix}$$