Corso di Ingegneria Biomedica - Algebra Lineare
Compito I, 11-2-2012

Risposta giusta=3 punti. Risposta sbagliata=-1 punti. La soluzione va consegnata compilata in modo univocamente comprensibile.

1- Sia U l'insieme dei polinomi (reali) di grado almeno 2 ma minore di 4. Sia V l'insieme dei polinomi (reali) di grado al più 5 e tali che $p(2) = 4$, e sia W l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali di grado al più 6 e tali che $p(3) = 0$. Quali di questi insiemi formano uno spazio vettoriale?

A - ☐ U
B - ☐ U, V
C - ☐ $*$ W
D - ☐ V, W

2- Sia U l'insieme dei polinomi (reali) di grado al più 4. Si considerino le seguenti funzioni $f, g, h : U \to \mathbb{R}$.Definite da: $f(p) = p(1)$, $g(p) = p(0) + 1, h(p) = 3p(0)p(1)$, per ogni $p \in U$.

Quali di queste funzioni sono lineari?

A - ☐ $*$ f
B - ☐ g
C - ☐ f, g
D - ☐ f, h

3 - Si calcoli l'autovettore relativo all'autovalore minore della seguente matrice. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$:

A - ☐ $\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$
B - ☐ $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$
C - ☐ $*$ $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$
D - ☐ Nessuna di queste.

4 - Si determini una base del nucleo della seguente matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

A - ☐ $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

B - ☐ $* \left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

C - ☐ $\left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$

D - ☐ nessuna di queste.

5 - Si consideri il seguente sistema $Ax = y$ con $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, e $y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A - ☐ Il sistema ha un' unica soluzione.
B - ☐ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1.
C - ☐ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 2.
D - ☐ * Il sistema non ha soluzioni.

6 - Calcolare l'inversa di $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

A - ☐ * $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

B - ☐ $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

C - ☐ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

D - ☐ nessuna di queste.

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome:$ _______________________; $Cognome:$ __________________________

La soluzione deve essere riportata in maniera completa negli appositi spazi. Non devono essere consegnate brutte copie. Le risposte non giustificate sono considerate nulle.

ESERCIZIO 1 (8 pt) Sia V l' insieme dei polinomi (reali) di grado al più 3 e tali che $p(0) = 0$ e $p(1) = 0$. Consideriamo la funzione $A(p) = \begin{vmatrix} p(1) \\ p(2) \\ 0 \end{vmatrix}$.

- V è uno spazio vettoriale? A è lineare?

-in caso affermativo: si calcoli il rango di A.

-si costruisca una base del nucleo di A

-in caso non affermativo: si modifichi la funzione in modo da farla diventare lineare e se ne calcoli il rango

Svolgimento (accenno):

Vè una spazio vettoriale, infatti se $p, q \in V$ allora $p(0) = q(0) = 0$ e $(\lambda_1 p + \lambda_2 q)(0) = 0$. Analogamente si vede cosa succede per $(p + q)(1)$.

$A : V \to \mathbb{R}^3$ è lineare: $A(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = ..etc.etc. = \lambda_1 \begin{vmatrix} p(1) \\ p(2) \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} q(1) \\ q(2) \\ 0 \end{vmatrix}$,

Il rango è la dimensione dell immagine di A. Si nota che per ogni $p \in V$ $p(1) = 0$. Quindi l'immagine è fatta di vettori della forma $\begin{vmatrix} 0 \\ q(2) \\ 0 \end{vmatrix}$e quindi il rango è ≤ 1.

Per vedere che è $\geq$ 1basta vedere che può essere $q(2) \neq 0$ per qualche $q \in V$... (per es. e trovando un polinomio siffatto).

...

.

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome$: ______________________; $Cognome$: _________________________

ESERCIZIO 2 (6 pt)

Scrivere l'equazione parametrica della retta s passante per il punto A di coordinate $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ e parallela alla retta r di equazione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{vmatrix}$.

Esiste un piano perpendicolare ad emtrambe le rette e passante per A? in caso affermativo si rappresenti il piano in forma parametrica.

Svoglimento (accenno):

La retta cercata ha direzione $\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{vmatrix}$ e passa per $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$,quindi un equazione parametrica è data da $\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{vmatrix}$.

Visto che le rette sono parallele esiste un piano perpendicolare ad entrambe. Un tale piano è è fatto di vettori $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ tali che $2x - 2y - 4z = 0$ (il prodotto scalare con la direzione fa zero).

Per avere questo piano in forma parametrica basta trovare due vettori che siano una base del piano trovato sopra. Ad es $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ (ponendo $x = 0$ per il primo e poi $y = 0$).

Quindi un tale piano è dato in forma parametrica da $\begin{vmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.