Corso di Ingegneria Biomedica - Algebra Lineare
Compito I, app 4 -2012

Risposta giusta=3 punti. Risposta sbagliata=-1 punti. La soluzione va consegnata compilata in modo univocamente comprensibile.

---

1 -Si calcoli la dimensione dell immagine dell applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata alla seguente matrice $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,. Il risultato è:

A- □ 1
B- □ 2
C- □ $*$ 3
D- □ 4

2 - Si calcolino gli autovalori della seguente $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

A- □ $\{2, 3, 4\}$
B- □ $\{1, 3, 4\}$
C- □ $*$ $\{1, 3, 5\}$
D- □ Nessuna di queste.

3 - Si calcoli l'autovettore relativo all' autovalore minore, della matrice proposta all esercizio

A- □ $*$ $\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$
B- □ $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$
C- □ $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$
D- □ Nessuna di queste

4-Si determini una base del nucleo della seguente matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$:

A- ☐ $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

B- ☐ $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$

C- ☐ $* \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

D- ☐ nessuna di queste.

5-Si consideri il seguente sistema $Ax = y$ con $A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, e $y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$Quale delle seguenti è vera?

A- ☐ Il sistema ha un' unica soluzione

B- ☐ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1

C- ☐ Il sistema ha uno spazio di soluzioni di dimensione 2

D- ☐ $*$ Il sistema non ha soluzioni.

2 - Calcolare l'inversa di $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, .

A- ☐ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

B- ☐ $* \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

C- ☐ $\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

D- ☐ nessuna di queste

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome$: ______________________;$Cognome$: _________________________

ESERCIZIO 1 (7 pt)

- Si determini se la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ è diagonalizzabile sui reali e si trovi C, tale che $A = CDC^{-1}$ con D matrice diagonale.
- Determinare una matrice B tale che $B^2 = A$. (dunque, in un certo senso $B = \sqrt{A}$).

Traccia soluzione
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$
Se $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, allora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \tag{0.1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

$COMPITO\ \ I -\ \ Nome:$ _______________________; $Cognome:$ _________________________

ESERCIZIO 2 (7 pt)

Si consideri l'insieme $P_2(t)$ dei polinomi (reali) in t aventi grado minore o guguale a 2 con la base $\left\{1, t, t^2\right\}$.

Si consideri $A : P_2(t) \to P_2(t)$ tale che

$$A(p) = p(0) + tp(1)$$

- A è una applicazione lineare?

-Scrivere la matrice relativa ad A per la base $\left\{1, t, t^2\right\}$

-Si consideri $V = \left\{p \in P_2(t) | A(p) = t^2\right\}$. V è un sottospazio vettoriale?