28-1-2012
(**traccia di soluzione**)

ESERCIZIO 1 (3 pt)

- Determinare se la matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ è diagonalizzabile sui reali.
- Determinare gli autovalori di A^{10}.

R: facilmente si trova che gli autovalori sono gli elementi di $\{1, 3\}$. Quindi A è diagonalizzabile (sono diversi).

Gli autovalori di A^{10} sono gli elementi di $1, 3^{10}$. Per capire perché è cosi basta utilizzare la definizione di autovalore e autovettore.

v è un autivettore con autovalore 3 se $Av = 3v$, dunque $AAv = A3v = 3Av = 3 * 3v$ da cui facilmente si deduce $A^{10}v = 3^{10}v$.

ESERCIZIO 2 (4 pt)

Si consideri l'insieme $P_2(t)$ dei polinomi (reali) in t aventi grado minore o guguale a 2 con la base $\{1, t, t^2\}$.

Si consideri $A : P_2(t) \to P_2(t)$ tale che

$$A(p) = t^2 p(0)$$

- A è una applicazione lineare?
R: si, la verifica è la solita.
-Scrivere la matrice relativa ad A per la base $\{1, t, t^2\}$
R:
$A(1) = t^3$ (il terzo elemento della base)
$A(t) = 0$
$A(t^2) = 0$
dunque la matrice è $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
-Si consideri $V = \{p \in P_2(t) | A(p) = t^2\}$. V è un sottospazio vettoriale?
No
L'origine non appartiene a V, infatti $A(0) = 0 \neq t^2$

ESERCIZIO 3 (6 pt)

- Dimostrare, eventualmente utilizzando i teoremi e le definizioni note.che per ogni matrice A, si ha $\det(A) = \det(A^T)$.

  R: Considerando lo sviluppo di Laplace rispetto alla riga per A e quello rispetto alla prima colonna di A^T e continuando a sviluppare nello stesso modo ci si accorge che si fanno esattamente le stesse operazioni, si procede per induzione rispetto alla dimensione della matrice...

- E' vero che gli autovalori di una matrice sono uguali agli autovalori della sua trasposta?

  R:E' vero, infatti il polinomio caratteristico è $d(A - \lambda I)$, ma per quanto detto sopra $d(A - \lambda I) = d((A - \lambda I)^T) = d(A^T - \lambda I^T) = d(A^T - \lambda I)$.