28-1-2012

(**le risposte non giustificate sono considerate di valore quasi nullo**)

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	C	C	B	B	D	B	D	D	C	C
II	B	A	A	B	C	C	D	C	D	C
III	C	A	A	B	D	C	D	D	C	C
IV										

ESERCIZIO 1 (3 pt)

Si considerino i vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}, v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, v_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}$

Si consideri $V = Span(v_1, v_2, v_3)$. Si cerchi una base di V e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$.

R:

V è generato da v_1 e v_2 che sono linearmente indipendenti e quindi formano una base.

Per completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$si consideri $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

ridotta a scala : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Dunque $\{v_2, v_2, e_1, e_2\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

ESERCIZIO 2 (4 pt)

Si consideri l'insieme $P_2(t)$ dei polinomi (reali) in t aventi grado minore o guguale a 2.

Si consideri $A : P_2(t) \to P_2(t)$ tale che

$$A(p) = tp(1)$$

-Si mostri che A è una applicazione lineare

-Si calcoli il rango di A

-Scrivere la matrice relativa ad A per la base $\{1, t, t^2\}$

-Si consideri $V = \{p \in P_2(t) | p(1) = 0\}$. V è un sottospazio vettoriale?

R

$A(p + p') = t(p(1) + p'(1)) = t(p(1)) + t(p'(1)) = A(p) + A(p')$

$Rk(A) = 1$, limmagine è generata da t

$A(1) = t$

$A(t) = t$

$A(t^2) = t$

la matrice è dunque $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$V = Ker(A)$ quindi è un sottospazio

ESERCIZIO 3 (6 pt)

Si consideri una applicazione lineare $P : V \to V$, e si supponga che $P \circ P = P$.

-Si esponga un esempio di un applicazione siffatta quando $V = \mathbb{R}^2$

-Dimostrare che se $v \in \mathrm{Im}(P)$ allora $P(v) = v$.

-Dimostrare che $\mathrm{Im}(P) \cap Ker(P) = 0$.

R:

Consideriamo $v \in \mathrm{Im}(P)$ allora $v = P(w)$

Ma allora $P(v) = P(P(w)) = P(w) = v$.

Se invece $v \in Ker(P)$ allora $P(v) = 0$.

Quindi, se $v \in \mathrm{Im}(P) \cap Ker(P)$ allora $v = 0$.