9-1-2012

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	A	A	B	B	C	A	B	C	C	B
II	C	B	A	B	A	A	B	A	A	C
III	B	C	C	A	C	B	C	B	A	A
IV										

ESERCIZIO 1

In $\mathbb{R}^4$si considerino i vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}, v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, v_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}, v_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

Si considerino $H = span(v_1, v_2)$, $K = span(v_3, v_4)$.

- Si determini la dimensione di $H + K$ ed una sua base. Si dica se questi formano una somma diretta.
- Si determini la dimensione di $H \cap K$ e si determini una sua base

Si deve calcolare il rango di $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$. Riduciamo la matrice a scala

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ quindi il rango è 3 da cui discende che $H+K$ ha dimensione 3 e i due spazi non formano una somma diretta. Una base di $H + K$ è $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Per la formula di Grassman si ottiene che $\dim(H \cap K) = 1$.

Per trovare una base per l'intersezione determiniamo una base di $\ker(A)$: Il vettore $v = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. Sappiamo quindi che $1v_1 - 2v_2 = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ è un vettore non nullo che appartiene a $H \cap K$ e come tale sarà una sua base.

ESERCIZIO 2

Sia $A \in M_{n,n}$ una matrice di rango $r \leq n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere giustificando la risposta:

1. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione allora esiste $c \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = c$ non ha soluzione.
2. Se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = c$ non ha soluzione allora esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione.

3. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette più di una soluzione, allora per ogni $c \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = c$ ammette più di una soluzione.

4. Se esiste $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ammette una unica soluzione, allora per ogni $c \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = c$ ammette una unica soluzione.

ESERCIZIO 3

Si consideri la matrice $B = A + \alpha I$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ dove A è una matrice $m \times m$, e I è la matrice identità. Si supponga che esista un autovettore u di A con autovalore λ.

Si dimostri che u è anche autovettore di B with con autovalore $\lambda + \alpha$.

Si consideri lo spazio $M_{m,m}$ delle matrici matrice $m \times m$ e il sottoinsieme H delle matrici che hanno u come autovettore.

L'insieme H è un sottospazio vettoriale di $M_{m,m}$? giustificare la risposta.

Risposta:

$Au = \lambda u$

$Bu = (A + \alpha I)u = \lambda u + \alpha u = (\lambda + \alpha)u$

$O \in H$? si

$A, B \in H \implies \lambda A + \gamma B \in H$?

$(\lambda A + \gamma B)u = \lambda Au + \gamma Bu = \lambda c_1 u + \gamma c_2 u = (\lambda c_1 + \gamma c_2)u$,OK